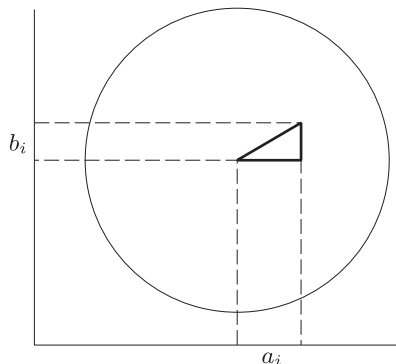


Második feladat. Adott a síkban egy egyenes, egy n cm sugarú kör (n egész szám) és a körben $4n$ darab 1 cm-es szakasz. Bizonyítsuk be, hogy húzható az adott egyenessel párhuzamosan vagy rá merőlegesen olyan húr, amelynek legalább két szakasszal van közös pontja.

Megoldás. Vetítsük a $4n$ szakasz mindegyikét az adott egyenesre (ezt vízszintesnek mondjuk) és egy rá merőleges (függőlegesnek mondott) egyenesre. A vízszintes vetületek hossza legyen $a_1, a_2, \dots, a_{4n}$, a függőlegeseké pedig $b_1, b_2, \dots, b_{4n}$. A feladat állítása egyértelmű azzal a kijelentéssel, hogy vagy a vízszintes, vagy a függőleges vetületek között van kettő, amelyeknek van közös pontjuk.

Az i -edik szakasz olyan (esetleg szakasszá elfajuló) derékszögű háromszög átfogója, amelynek vízszintes befogója a_i , függőleges befogója pedig b_i hosszúságú (1. ábra).



1. ábra

Minthogy a háromszög két oldalának összege a harmadiknál nagyobb,

$$a_i + b_i \geq 1.$$

Itt az egyenlőséget is meg kellett engednünk, mert számolunk azzal, hogy a vetített szakasz vízszintes vagy függőleges. Eredményünkből következik, hogy mind a $4n$ szakasz vetületeinek összege

$$\sum a_i + \sum b_i \geq 4n.$$

Itt és a következőkben is minden összegezés az $i = 1, 2, \dots, 4n$ értékekre terjed ki.

Ha a vízszintes vetületek között nincs két közös pontú, akkor ezek együttesen nem fedik le az n -sugarú kör $2n$ hosszúságú vízszintes vetületét, tehát

$$\sum a_i < 2n.$$

Ugyanígy, ha a függőleges vetületek között nincs két közös pontú, akkor

$$\sum b_i < 2n.$$

Ha tehát egyik eset sem következik be, akkor

$$\sum a_i + \sum b_i < 4n.$$

Ez ellentmond fenti eredményünknek. Kell tehát, hogy a mondott két eset valamelyike bekövetkezzék, ami – mint megállapítottuk – a feladat állításának helyességét mondja ki.

Megjegyzés. A feladat megoldásakor zárt szakaszokra gondoltunk, azaz a szakaszokhoz végpontjaikat is hozzászámítottuk. Igaz azonban a feladat állítása nyílt, tehát végpontjaiktól megfosztott szakaszokra is, ennek bizonyításához azonban ki kell egészítenünk megoldásunkat.

Ha nyílt szakaszokkal dolgozunk, akkor a kör $2n$ hosszúságú vetületén elhelyezkedő, közös pont nélküli vetületi szakaszok hosszának összege $2n$ is lehet, hiszen most a végpontjukkal érintkező szakaszoknak nincs közös pontja. Így tehát csak $\sum a_i \leq 2n$, $\sum b_i \leq 2n$ és ezekből a

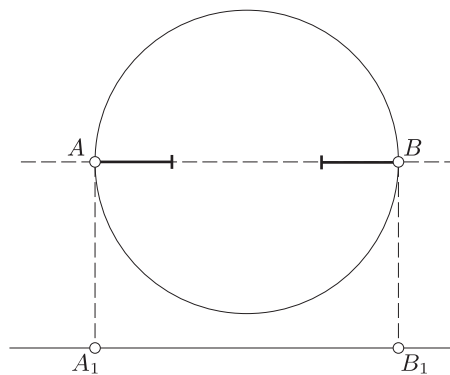
$$\sum a_i + \sum b_i \leq 4n$$

eredményhez juthatunk, ami nem jelent ellentmondást.

Ha azonban így nem jutunk ellentmondáshoz, tehát a feladat állításának bizonyításához sem, akkor

$$\sum a_i + \sum b_i = 4n,$$

tehát $\sum a_i = 2n$. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes vetületek (végpontjaikkal együtt) a kör teljes vízszintes vetületét, az A_1B_1 szakaszt beborítják (2. ábra).



2. ábra

Ekkor a vetületek között van A_1 kezdőpontú és B_1 végpontú is. Ilyen vetületet azonban csak a kör vízszintes AB átmérőjén elhelyezkedő szakaszok adhatnak. Ebben az eddig el nem intézett esetben tehát az adott egyenessel párhuzamos AB egyenes kielégíti a feladat követelményét, hiszen nemcsak közös pontja van két szakasszal, hanem tartalmazza is azokat.