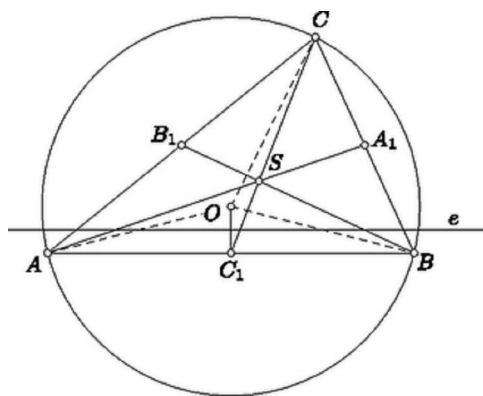


Ha az $ABC\triangle$ nem tompaszögű, akkor (a belsejében vagy a határán) tartalmazza a köréírt kör O középpontját. Ezért az S súlypont által meghatározott SAB , SBC , SCA háromszögek közül legalább az egyik szintén tartalmazza az O pontot. Legyen az $SAB\triangle$ ilyen (4. ábra).



4. ábra

Minthogy az $SAB\triangle$ tartalmazza az $OAB\triangle$ -et,

$$SA + SB \geq OA + OB,$$

és az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha O és S azonos. Eszerint az $s_a = AA_1$, $s_b = BB_1$ súlyvonalakra és a körülírt kör r sugarára

$$\frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b \geq 2r,$$

vagyis

$$s_a + s_b \geq 3r.$$

Ha O azonos C_1 -gyel, akkor nyilván $CO = CC_1$. Ha azonban O nem azonos C_1 -gyel, akkor az OC_1 szakaszt merőlegesen felező e egyenes belevág a háromszögbe, tehát a vele párhuzamos AB szakaszt elválasztja a C csúctól. Eszerint C és O ugyanabban az e egyenes által határolt félsíkban van, s ezért a C pont az e egyenesre vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő O , C_1 pontok közül O -hoz van közelebb. A $CC_1 = s_c$, és $CO = r$ szakaszokra ezek szerint

$$s_c \geq r$$

mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha O és C_1 azonos:

Egyenlőtlenségeinket összeadva

$$s_a + s_b + s_c \geq 4r$$

adódik, de itt az egyenlőség soha sem teljesülhet, mert egyszerre nem teljesülhet mind a két összeadott egyenlőtlenségben, hiszen O nem lehet az egymástól különböző S , C_1 pontok mindegyikével azonos.

Megjegyzések. 1. Nem hagyható el a feladatnak az a megszorítása, hogy a háromszög nem tompaszögű. Bármilyen csekély túllépést engednénk is meg, 90° fölé, a feladat állítása már nem volna helyes. Bebizonyítjuk, hogy ez valóban így van.

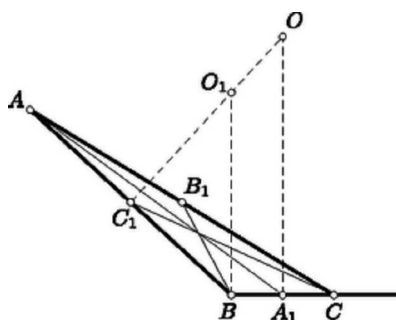
Induljunk ki tehát egy tetszőlegesen megadott $ABC\triangle < 90^\circ$ szögéből. Messe az $AB = c$ szakasz felezőmerőlegese a BC szára B -ben emelt merőlegest az O_1 pontban (5. ábra). A BC száron úgy választjuk meg a C pontot, hogy a $BC = a$ távolságra

$$a + c \leq 2 \cdot BO_1$$

teljesüljön. Az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarára

$$r = BO > A_1O > BO_1,$$

hiszen a két utolsó szakasz ugyanannak a szögnek párhuzamos szelője, és BO_1 van a szög csúcsához közelebb.



5. ábra

Az $ABC\triangle$ súlyvonalaira az ABA_1 , BC_1B_1 , CBC_1 háromszögek egyenlőtlenségei alapján

$$s_a < \frac{a}{2} + c, \quad s_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \quad s_c < a + \frac{c}{2}.$$

Ezek szerint

$$s_a + s_b + s_c < 2(a + c) < 4 \cdot BO_1 < 4r.$$

2. Bebizonyítjuk, hogy akkor sem volna helyes a feladat állítása, ha benne 4 helyett valamely 4-nél bármi csekéllyel is nagyobb szám állna.

Egy $2d$ alapú, m magasságú egyenlőszárú háromszög (6. ábra) súlyvonalaira az $AA_1D\triangle$ -re vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával

$$s_a = s_b < \frac{m}{2} + \frac{3}{2}d, \quad s_c = m, \\ s_a + s_b + s_c < 2m + 3d.$$

A körülírt kör sugarára

$$r > \frac{m}{2},$$

hiszen az m magasságot a kör tartalmazza. Ezek szerint

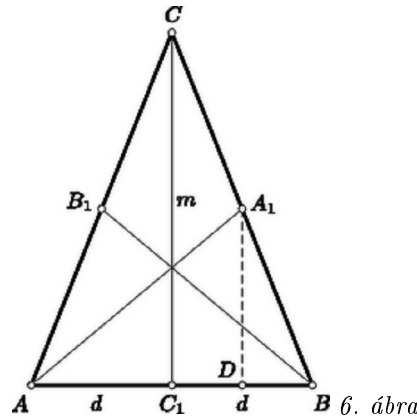
$$s_a + s_b + s_c < \left(4 + 6\frac{d}{m}\right)r.$$

Ha λ egy tetszőleges, 4-nél nagyobb szám, m rögzítése után d megválasztható olyan kicsire, hogy

$$4 + 6\frac{d}{m} < \lambda$$

teljesüljön. Az így adódó háromszögre a fentiek szerint

$$s_a + s_b + s_c < \lambda r.$$



3. A feladat arról szólt, hogy a súlyvonalak összege a körülírt kör sugarának legalább hányszorosa. Bebizonyítjuk most, hogy legfeljebb 4,5-szöröse, és itt a háromszöget illetően semmiféle megszorítást sem teszünk. Szabályos háromszög esetében a vizsgált arány éppen 4,5. Meglepő talán a nem tompaszögű háromszögekre érvényes viszonylag szűk (4, 4,5) értékköz.

Tekintsük a sík egy P pontjának az $ABC\triangle$ csúcsaitól mért távolságait. Ezek számtani közepét $a(P)$, négyzetes közepüket pedig $q(P)$ jelöli. Ismeretes, hogy $a(P) \leq q(P)$.

Bizonyításunk arra épül, hogy $q(P) \geq q(S)$. Ha az A , B , C pontokba egységnyi tömegeket helyezünk, akkor $3[q(P)]^2$ e tömegrendszer tehetetlenségi nyomatéka a síkot a P pontban merőlegesen döfő egyenesre vonatkozólag. Az imént kimondott egyenlőtlenség következik tehát abból, hogy párhuzamos tengelyek közül a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a legkisebb.

Egyenlőtlenségünket fizikai ismeretekre való hivatkozás nélkül akarva bebizonyítani bevezetjük az

$$\vec{SA} = \mathbf{a}, \quad \vec{SB} = \mathbf{b}, \quad \vec{SC} = \mathbf{c}, \quad \vec{SP} = \mathbf{p}$$

vektorokat (lásd pl. Matematikai Versenytételek, II. rész, 26–30. o. és 69. o.). Felhasználjuk azt, hogy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Az egyenlőtlenségünkben szereplő értékekre

$$\begin{aligned}
3[q(S)]^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2, \\
3[q(P)]^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{p})^2 = \\
&= (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2\mathbf{p}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + 3\mathbf{p}^2 = \\
&= 3[q(S)]^2 + 3\mathbf{p}^2 \geq 3[q(S)]^2.
\end{aligned}$$

Ezzel a $q(P) \geq q(S)$ egyenlőtlenség bizonyítást nyert, de ebből eredeti állításunk is nyomban következik:

$$s_a + s_b + s_c = \frac{9}{2}a(S) \leq \frac{9}{2}q(S) \leq \frac{9}{2}q(O) = \frac{9}{2}r.$$

4. Megemlítjük, de nem részletezzük, hogy a tetraéder súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának legfeljebb $16/3$ -szorosa, s hogy ez ugyanúgy bizonyítható, ahogyan a megfelelő síkbeli állítást éppen bebizonyítottuk. Ha feladatunk állításának térbeli megfelelőjét keressük, valamilyen megszorítást kell tennünk a tetraéderre vonatkozólag, annak megfelelően, hogy a feladat csak nem tompaszögű háromszögekről szólt. Azok a háromszögek nem tompaszögűek, amelyek tartalmazzák a körük írt kör középpontját. Érthető tehát, hogy azokról a tetraéderekről szólunk, amelyek tartalmazzák a körük írt gömb középpontját, azonban csak bizonyítás nélkül említjük meg, hogy az ilyen tetraéderek súlyvonalainak összege a körülírt gömb sugarának 4-szeresénél nagyobb, és itt 4 helyébe nagyobb számot írva már helytelen állításhoz jutunk.