

I. megoldás. A baloldali szorzat

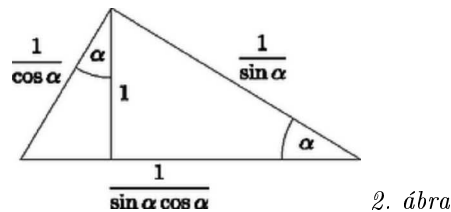
$$1 + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

alakban írható, hiszen $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Minthogy egy szög szinusza és koszinusa 1-nél nagyobb nem lehet, a felírt összeg második és harmadik tagja legalább 1, utolsó tagja pedig legalább 2. A teljes összeg értéke tehát legalább 5. Az összeg azonban nem lehet 5, mert a két középső tag nem lehet egyszerre 1, hiszen $\sin \alpha = 1$ és $\cos \alpha = 1$ egyszerre nem teljesülhet. Az összeg értéke eszerint 5-nél nagyobb.

II. megoldás. Egy α szögű 1 magasságú derékszögű háromszöget tekintünk (2. ábra) A szögfüggvények értelmezéséből következik, hogy e háromszög befogói és átfogója

$$a = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Feladatunk $a+b+c > 4$ bizonyítását kívánja. Ez nyomban következik abból, hogy $a+b > c$ és $c \geq 2$, hiszen a derékszögű háromszög magassága az átfogónak legfeljebb a fele, amint ez a Thales-kör szemléletéből is nyomban adódik.



III. megoldás. A feladat állításán túlmenően bebizonyítjuk, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2} = 5,828 \dots,$$

s hogy egyenlőség csak az $\alpha = 45^\circ$ esetben következik be. Ennek igazolásához az I. megoldásra hivatkozva elég belátnunk, hogy

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \geq 2\sqrt{2},$$

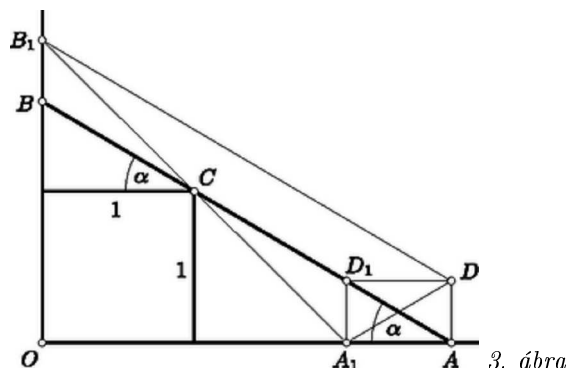
s hogy itt is csak $\alpha = 45^\circ$ esetén következik be az egyenlőség. Ezt háromféleképpen bizonyítjuk be.

a) Az előző megoldás jelöléseit használva $a + b \geq 2\sqrt{2}$ a bizonyítandó állítás. Ez abból adódik, hogy

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = c^2 + 2cm \geq 8.$$

Felhasználtuk itt Pythagoras tételét, a terület kétféle kifejezése alapján adódó $ab = cm$ összefüggést és az $m = 1$ esetben érvényes $c \geq 2$ egyenlőtlenséget. Egyenlőség eszerint csak $c = 2m$ esetén, azaz egyenlőszárú derékszögű háromszögre következik be.

b) Forgassuk el a 2. ábrában a magasságtól balra elhelyezkedő háromszöget felső csúcsa körül pozitív irányban 90° -kal. Így a 3. ábra vastagon megrajzolt részéhez jutunk. A bizonyítandó állítás szerint az AB szakasz hosszabb, mint a 45° -kal hajló A_1B_1 szakasz, hiszen ennek hossza $2\sqrt{2}$. Azt kell tehát igazolnunk, hogy a derékszögű AOB szárait összekötő s a C ponton áthaladó szakaszok közül a szimmetrikusan elhelyezkedő A_1B_1 szakasz a legrövidebb.



Mint hogy az OA és OB szár között nincs szerepkülönbség, feltehetjük, hogy a $\alpha < 45^\circ$. A B pont C -re vonatkozó tükörképét D_1 -gyel jelöljük. A C -re vonatkozó szimmetria miatt a BB_1 , A_1D_1 szakaszok párhuzamosak és egyenlők. A velük párhuzamos és egyenlő AD szakasz a $BADB_1$ paralelogrammához és az A_1ADD_1 téglalaphoz vezet. Az utóbbiból kiolvasható, hogy $AA_1D_1 = A_1AD_1 = \alpha$, és így $B_1A_1D_1 = 135^\circ - \alpha > 90^\circ$. Eszerint a $B_1A_1D_1$ -ben DB_1 a legnagyobb oldal, tehát $A_1B_1 < DB_1 = AB$.

c) Felhasználjuk, hogy a pozitív x, y számok $a(x, y)$ számtani, $g(x, y)$ mér-tani és $q(x, y)$ négyzetes közepére

$$g(x, y) \leq a(x, y) \leq q(x, y),$$

s hogy egyenlőség mindkét esetben csak $x = y$ esetén teljesül. Eszerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} &= 2a\left(\frac{1}{\sin \alpha}, \frac{1}{\cos \alpha}\right) \geq 2g\left(\frac{1}{\sin \alpha}, \frac{1}{\cos \alpha}\right) = \\ &= \frac{2}{g(\sin \alpha, \cos \alpha)} \geq \frac{2}{q(\sin \alpha, \cos \alpha)} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Egyenlőség csak $\sin \alpha = \cos \alpha$, tehát $\alpha = 45^\circ$ esetén áll fenn.

Megjegyzés. A feladatban α hegyesszöget jelentett. Erre a megszorításra azért volt szükség, mert ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ vagy $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, akkor a feladat egyenlőtlenségének a baloldalán csak az egyik tényező pozitív, s a szorzat negatív. Ha viszont $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, akkor mindkét tényező negatív, de szorzatuk 1-nél kisebb. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.