

Megjegyzések. 1. A feladat szövegének zárójelbe foglalt kiegészítése más szóval azt jelenti, hogy nem olyan u, v számpárok számát vizsgáljuk, amelyekben a két szám sorrendje közömbös, hanem az u, v rendezett számpárokét, hogy tehát az összeszámláláskor két számpár csak akkor tekintendő azonosnak, ha bennük az első számok és a második számok is egyenlők.

2. A feladat alábbi megoldásaiban használjuk a következő, általánosan is használt jelöléseket: természetes számok körében (a, b) az a, b számok legnagyobb közös osztóját, $[a, b]$ a legkisebb közös többszörösüket, $a|b$ pedig azt jelöli, hogy a osztója b -nek.

I. megoldás. Legyen n törzstényezőss felbontása

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s},$$

ahol $p_1, p_2, \dots, p_s$ különböző törzsszámok, $a_1, a_2, \dots, a_s$ pedig nem-negatív egész számok. Minthogy a vizsgált számpárookra $[u, v] = n$, az u, v számok törzstényezői is csak a $p_1, p_2, \dots, p_s$ törzsszámok közül valók lehetnek.

Vizsgáljuk meg, hogy pl. p_1 mekkora kitevővel szerepelhet u -ban és v -ben. E két kitevő között $[u, v] = n$ miatt a_1 -nek is szerepelnie kell, és egyik sem lehet a_1 -nél nagyobb. Ez háromféleképpen következhetik be: 1. p_1 kitevője mindkét helyen a_1 , ez 1 lehetőség; 2. p_1 kitevője u -ban a_1 , v -ben viszont kisebb, tehát a $0, 1, 2, \dots, a_1 - 1$ számok valamelyike, ami a_1 lehetőséget jelent; 3. p_1 kitevője v -ben a_1 és u -ban kisebb, ami ismét a_1 lehetőséget ad. Az összes lehetőségek száma ezek szerint $2a_1 + 1$.

Hasonlót mondhatunk a többi törzstényezőről is. Minthogy pl. p_1 kitevőinek rögzítése után a többi kitevő számára ugyanazok a lehetőségek maradnak meg, a vizsgált u, v számpárok száma az egyes törzstényezőkre számba vett lehetőségek szorzata:

$$(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \dots (2a_s + 1).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy n^2 osztóinak száma ugyanennyi. Ez nyomban belátható abból, hogy

$$n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \dots p_s^{2a_s}$$

osztóiban pl. p_1 kitevője $0, 1, 2, \dots, 2a_1$ lehet, azaz $2a_1 + 1$ lehetőség van, s hogy az így adódó lehetőségek számát ismét össze kell szorozni, hiszen az egyes törzstényezőkre vonatkozó lehetőségek egymástól ismét függetlenek.

Megjegyzés. Megoldásunkban az a kitevő $2a + 1$ lehetőséghez vezetett. Ehhez az értékhez a következő, bonyolultabb módon is eljuthatunk:

Az u -ban és v -ben szereplő kitevők egyike sem nagyobb a -nál, azaz mindkettő a $0, 1, 2, \dots, a$ értékek valamelyike. Eszerint $a + 1$ lehetőség adódik mindegyik megválasztására, és $(a + 1)^2$ lehetőség a kitevőpár számára. E lehetőségek közül azonban csak azok felelnek meg, amelyekben legalább egyszer maga az a érték is szerepel. Ki kell tehát zárunk azokat az eseteket, amelyekben mindkét kitevő a $0, 1, 2, \dots, a - 1$ számok közül való. Ez összesen a^2 lehetőség kirekesztését jelenti, s ezért a tényleges lehetőségek száma $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$.

Ez a bonyolultabb út azért tanulságos, mert magyarázat nélkül érthetővé teszi, hogy ha az u, v számpár helyett olyan $u_1, u_2, \dots, u_k$ számsorozatok számát keressük, amelyekben szereplő számok legkisebb közös többszöröse n , akkor feleletül

$$[(a_1 + 1)^k - a_1^k] [(a_2 + 1)^k - a_2^k] \dots [(a_s + 1)^k - a_s^k]$$

adódik.

II. megoldás. A feladat állítását általában bizonyítjuk, hogy a vizsgált u, v rendezett számpárok és n^2 osztói között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítünk. Az u, v számpárhoz azt a d számot rendeljük hozzá, amelyre

$$(1) \quad \frac{u}{v} = \frac{d}{n}.$$

Ez a d valóban egész szám, mert $[u, v] = n$ miatt $v|n$, s így a baloldali törtet egész számmal kell bővíteni, hogy a jobboldali alakot vegye fel. Ez azt is mutatja, hogy d valóban n^2 osztója, hiszen az u számlálót n egy másik osztójával n/v -vel szorozva adódik.

Fel fogjuk használni, hogy ha $u_1 : v_1 = u_2 : v_2$, akkor

$$(2) \quad u_1 : u_2 = v_1 : v_2 = [u_1, v_1] : [u_2, v_2].$$

Két szám legkisebb közös többszörösének keresésekor ugyanis két olyan, lehetőleg kicsiny egész számot kell keresnünk, amelyekkel az egyiket és a másikat megszorozva ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Ezeknek az egész számoknak a megválasztása eszerint csak a megadott két szám arányától függ. Ha tehát az u_1, v_1 számpárról az ugyanolyan arányú u_2, v_2 számpárra térünk át, akkor – miként állítottuk – a legkisebb közös többszörös is velük arányosan változik meg.

Bebizonyítjuk most, hogy különböző u_1, v_1 és u_2, v_2 számpárokhöz nem tartozhat ugyanaz a d szám. Ha ez így volna, akkor rájuk

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{d}{n}$$

s ennek következtében (2) is teljesülne. Minthogy pedig $[u_1, v_1] = [u_2, v_2] = n$, (2) szerint $u_1 = u_2$ és $v_1 = v_2$ adódik, ami állításunk helyességét bizonyítja.

Be kell még bizonyítanunk, hogy n^2 minden d osztója szerepel az u, v számpárokhoz tartozó számok között. Ennek bizonyítása végett a d/n törtet redukált

$$\frac{d}{n} = \frac{p}{q}$$

alakra hozzuk, ahol tehát $(p, q) = 1$. Elég bebizonyítanunk, hogy $[p, q] | n$, mert akkor (2) szerint a p/q tört olyan u/v törtté bővíthető, amelyre az $[u, v] = n$ feltétel is teljesül.

Eszerint már csak $p | n$ és $q | n$ bizonyítása a feladatunk. Az utóbbi nyilvánvalóan helyes, hiszen q egy n nevezőjű tört egyszerűsítése után lépett fel nevezőként. A p -re vonatkozó állítás

$$\frac{n^2}{d} = \frac{nq}{p}$$

következménye, mert itt a baloldalon egész szám áll, ezért a jobboldalon is, azaz $p | nq$. Minthogy pedig $(p, q) = 1$, eredményünkéből $p | n$ is következik.

III. megoldás. Az előző megoldáshoz hasonlóan okoskodunk és ugyanúgy indulunk el. A vizsgált számpárokhoz ismét (1) előírásával rendeljük hozzá n^2 egy-egy osztóját.

(1)-ből (2)-re hivatkozva

$$(3) \quad u : d = v : n = n : [d, n]$$

következik, hiszen $[u, v] = n$. Eszerint d ismeretében u és v már meghatározható:

$$(4) \quad u = \frac{dn}{[d, n]}, \quad v = \frac{n^2}{[d, n]}$$

n^2 valamely d osztója tehát csak ehhez az egyetlen u, v számpárhoz tartozhat hozzá.

Ha $d | n^2$, akkor (4) egész számokat szolgáltat, hiszen dn és n^2 egyaránt közös többszöröse a d, n számoknak, ezért legkisebb közös többszörösük egészszámszorosa. Ha tehát n^2 valamely d osztójából kiindulva (4) előírásával az u, v számpárt képezzük, olyan egész számokat kapunk, amelyekre a (4)-gyel egyenértékű (3) is teljesül, ami csak $[u, v] = n$ esetén következhetik be. Ezek szerint n^2 minden osztója szerepel az u, v számpárjainkhoz rendelt számok között.