Megjegyzés. A feladat zárójeles toldaléka felesleges akkor, ha egytagú összeget is lehetségesnek tartunk, ha tehát bármely számot a saját összegének is mondunk. Ez a felfogás megkönnyíti a szövegezést, a megoldásainkban szereplő összegek is így értendők.

I. megoldás. A feladat állításán túlmenően azt bizonyítjuk, hogy ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, akkor az n természetes szám felírható a véges $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Ezt az állítást k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Ha $k = 1$, akkor állításunk $a = 1$ miatt helyes, hiszen ebben az esetben csak $n = 1$ lehetséges. Legyen tehát $k > 1$, és tegyük fel, hogy állításunk helyes, ha benne k helyén $k - 1$ áll.

Ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$, akkor indukciós feltevésünk szerint n felírható a kívánt alakban, ti. már $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ is elegendő az összegül n-et adó számok kiválasztásához. Legyen tehát

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \leq n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Minthogy a baloldali összeg a feladat feltevése szerint legalább a_k, egyenlőtlenségeinkből

$$0 \leq n - a_k \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$$

következik. Eszerint $n - a_k$ vagy 0, vagy pedig az indukciós feltevés szerint felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Így tehát vagy $n = a_k$, vagy pedig a_k-t a kiválasztott számokhoz csatolva összegül n adódik.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy ha $0 < n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, akkor n felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként, de most n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk.

Ha $n = 1$, akkor $a_1 = 1$ miatt helyes az állítás, akármekkora is k értéke. Legyen tehát $n > 1$, és tegyük fel, hogy állításunk helyes, ha benne n helyén nála kisebb m szám áll.

A rögzített $n > 1$ mellett olyan k értékeket kell tekintenünk, amelyekre $n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ teljesül. Elég, ha közülük csak a legkisebbel foglalkozunk, tehát azzal a k értékkel, amelyre

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} < n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

hiszen k növelésekor az összegül n-et adó számok kiválasztásához rendelkezésre álló választék csak növekszik.

Egyenlőtlenségeinkből az $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - n$ értékre $0 \leq m < a_k$ adódik. Így tehát a feladat feltevését is alkalmazva

$$0 \leq m \leq a_k - 1 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} < n.$$

Ha tehát az érdektelen $m = 0$ (azaz $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$) esetet figyelmen kívül hagyjuk, akkor

$$0 < m < n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Indukciós feltevésünk szerint ez éppen azt biztosítja, hogy m előállítható az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Ha tehát ezeket ebből a sorozatból elhagyjuk, akkor a megmaradóknak n az összege.

Megjegyzések. 1. Felvethető a kérdés, hogy feladatunk feltevésének teljesülnie kell-e, ha állítása teljesül. Ez nincs így. Ha pl. minden $i \neq 2$ esetben $a_1 = 1$, viszont $a_2 = 3$, akkor a feltevés a $k = 2$ esetben nem teljesül: $3 > 1 + 1$, viszont bármely természetes szám mégis előállítható az $1, 3, 1, 1, 1, \ldots$ sorozatból kiválasztott számok összegeként.

Elmondhatjuk, hogy negatív tapasztalatunk nem meglepetés, mert a végtelen sorozat elemeinek permutálása a természetes számok előállíthatóságának mit sem árt, viszont megszüntetheti a feladat feltevésének teljesülését. Előző példánk is úgy keletkezik, hogy a feltevést is kielégítő $1, 1, 3, 1, 1, 1, \ldots$ sorozat két elemét felcseréljük.

2. Feladatunk feltételének szükségességét mégiscsak bebizonyítjuk, de a következő formában: *Ha minden természetes szám felírható egy természetes számokból alakuló $c_1, c_2, c_3, \ldots$ végtelen sorozatból kiválasztott számok összegeként, akkor ez a sorozat átrendezhető $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots$ alakba úgy, hogy*

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$$

minden $k > 1$ értékre teljesüljön.

Abból indulunk ki, hogy $a_1 = 1$ lehetséges választás, hiszen 1-nek szerepelnie kell a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban, mert 1 is előállítható általa. A további a_1 értékek megválasztását a következőképpen szabályozzuk:

Minthogy $N_2 = 2$ előállítható, a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a_1 elhagyása után is szerepelnie kell legalább egy N_2-nél nem nagyobb elemnek (ti. 1-nek vagy 2-nek). Azt választjuk közülük a_2-nek, amelyiknek a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a legkisebb az indexe.

a_2 megválasztása után van egy legkisebb N_3 természetes szám (ti. 3 vagy 4), amely nem írható fel a véges a_1, a_2 sorozatból kiválasztott számok összegeként. Szerepelnie kell ezért a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a_1, és a_2 elhagyása után is legalább egy N_3-nál nem nagyobb számnak. Azt választjuk közülük a_3-nak, amelyiknek az indexe a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a legkisebb.

Így folytatjuk ezt az eljárást. Ha már megválasztottuk az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, sorozatelemeket, akkor van egy legkisebb N_k természetes szám, amely nem írható fel a véges $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Szerepelnie kell ezért a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a már kiválasztott elemek elhagyása után legalább egy N_k-nál nem nagyobb számnak. Ezek közül azt választjuk a_k-nak, amelyiknek az indexe a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozatban a legkisebb.

A következő lépésben fellépő N_{k+1} nagyobb N_k-nál, hiszen N_k maga már bizonyosan felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sorozatból kiválasztott számok összegeként vagy azért, mert $a_k = N_k$, vagy pedig azért, mert a_k mellé az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sorozatból $N_k - a_k$ összeget adó számokat választhatunk ki, hiszen N_k volt a legkisebb így elő nem állítható szám.

Ha tehát eljárásunkat minden határon túl folytatjuk, akkor $N_2 < N_3 < N_4 < \ldots$ miatt a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat bármely c_i eleme előbb-utóbb kiválasztásra kerül, mert ha pl. a k-adik lépésben már $N_k \geq c_i$ akkor ettől a lépéstől kezdve csak c_i vagy nála kisebb indexű elem kerülhet kiválasztásra, márpedig a véges sok $c_1, c_, \ldots, c_{i-1}$ elem előbb-utóbb elfogy. Ezek szerint az általunk képezett $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatban a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sorozat minden eleme előfordul, tehát az utóbbi sorozatot valóban átrendeztük.

N_k definíciójából következik, hogy értéke legfeljebb $1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$ hiszen ez a szám biztosan nem állítható elő az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sorozatból kiválasztott számok összegeként. Minthogy pedig $a_k \leq N_k$, bebizonyítottuk, hogy feladatunk feltevésének teljesülnie kell az átrendezéssel származtatott $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatra.

3. Ha az $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ feltételnek eleget tevő monoton sorozatokra szorítkozunk, akkor kizártuk azt, hogy a sorozat elemeit permutálhassuk, hogy tehát a feladat feltevésének teljesülése ettől a permutálástól függjön. Az ilyen monoton sorozat esetében a feladat feltevésének (minden permutálás nélkül) teljesülnie kell, ha az állítása teljesül.

Ha ugyanis $a_k > 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} = n$, akkor n nem írható fel az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozatból kiválasztott számok összegeként, hiszen ebben a végtelen sorozatban csak az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ elemek nem nagyobbak n-nél, és mindezeknek az összege még mindig kisebb nála.

4. Utolsóként azt a kérdést vetjük fel, hogy hogyan kell a feladat feltevését kielégítő sorozatot megválasztani, ha azt akarjuk, hogy elemei a lehető legnagyobbak legyenek. Megmutatjuk, hogy 1, 2, 4, 8, ... ez az optimális sorozat.

Akárhogyan választjuk meg ugyanis a feltevést kielégítő sorozatot, ebben minden $k > 1$ értékre teljesül az

$$a_k \leq 2^{k-1}$$

egyenlőtlenség. Ezt k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be. A $k = 2$ esetben helyes az állítás, mert a feltevés szerint $a_2 \leq 1 + a_1 = 2^1$. Legyen tehát $k > 2$, és tegyük fel, hogy az állítás teljesül, ha benne k helyén nála kisebb szám áll. Ekkor

$$a_k \leq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \leq 1 + 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-2} = 2^{k-1},$$

ami állításunk helyességét bizonyítja.

Az utolsó egyenlőség, éppen feladatunk állítására hivatkozva, azt a jól ismert tényt bizonyítja, hogy minden természetes szám felírható 2 különböző hatványainak összegeként. Beláttuk tehát, hogy a vizsgált tulajdonságú sorozatok közül 2 hatványsorozatának az elemei a legnagyobbak.