

I. megoldás (KÓTA GÁBOR dolgozata nyomán). Tegyük fel, hogy pl. A és A -né nem találkozott a betegágynál. Ekkor A -né vagy elment, mielőtt férje megérkezett és ez esetben korábban távozott a betegágytól mint két sógornője, hiszen ők találkoztak a betegágynál az A -né távozása után érkező A -val, vagy pedig A -né A távozása után érkezett és ekkor később érkezett mint két sógornője, hiszen azoknak A távozása előtt kellett a beteghez érkezniük. Csak úgy lehet tehát, hogy egy asszony nem találkozott a férjével, ha vagy előbb távozott, mint a két sógornője, vagy később érkezett náluk.

Azonban három asszony közül legalább az egyik sem nem érkezett a másik kettő után, sem nem távozott azok távozása előtt, így legalább egynek találkoznia kellett a férjével.

II. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Tegyük fel, hogy egyik házaspár sem találkozott a betegágynál. Ez esetben, ha pl. A előbb érkezett A -nénél, akkor el is kellett távoznia felesége érkezése előtt. Viszont találkozott B -nével, tehát B -né előbb érkezett mint A -né. B -nek felesége távozása után kellett érkeznie, csak így találkozhatott A -néval anélkül, hogy feleségével találkozott volna. Ha A a felesége után érkezett a betegágyhoz, akkor fenti megfontolásunkban férj és feleség szerepét mindenütt megcserélve szintén azt nyerjük, hogy férj és feleség a B házaspárból fordított sorrendben kellett, hogy a betegágyhoz érkezzék, mint az A házaspárból.

Ugyanezt a megfontolást megismételve egyrészt az A és C házaspárra, másrészt a B és C házaspárra azt kapjuk, hogy C és C -né fordított sorrendben kellett hogy a betegágyhoz érkezzék, mint A és A -né, de ugyancsak fordított sorrendben, mint B és B -né. Ez azonban már lehetetlen, tehát legalább egy házaspárnak találkoznia kellett a betegágynál.

Megjegyzés. A most ismertetett megfontolás alkalmas egy általánosabb tétel bizonyítására is. Hogy ezt könnyebben megfogalmazhassuk, előbb átfogalmazzuk az eredeti feladatot.

A három házaspár elhelyezkedhet egy kerek asztal körül pl. A , B -né, C , A -né, B , C -né sorrendben (C -né másik szomszédja A). Ekkor azt mondhatjuk: a hattagú társaság minden tagja meglátogatott (pl. másnap) egy beteg ismerőst. Mindenki csak egyszer járt ezen a napon a betegágynál és mindenki találkozott ott mind a két előző napi asztalszomszédjával. Ez csak úgy történhetett, hogy valaki házastársával (azaz a vele szemben ülővel) is találkozott.

Ez speciális esete a következő általánosabb tételnek: *Egy nap n házaspár beszélgetett egy asztal körül, ahol úgy helyezkedtek el, hogy mindenki éppen házastársával szemben ült. Elhatározták, hogy másnap mindegyikük meglátogatja egy közös ismerőst, aki beteg. A látogatás során úgy adódott, hogy mindenki találkozott a betegágynál két előző napi asztalszomszédjával és ezen a napon mindenki csak egyszer járt a betegnél. Ekkor valamelyik házaspár találkozott a betegágynál.*

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy egyik házaspár sem találkozott, noha a többi feltételek teljesültek. Az asztalszomszédok legyenek sorra $A_1, A_2, \dots, A_{2n}, A_1$, itt A_1 és A_{n+1} , A_2 és A_{n+2} , $\dots$, A_n és A_{2n} házastársak. Tegyük fel, hogy a betűzést úgy választottuk, hogy A_1 előbb érkezett a betegágyhoz, mint házastársa, A_{n+1} (és feltevésünk szerint el is kellett távoznia A_{n+1} érkezése előtt).

Ekkor A_2 , aki találkozott A_1 gyel, előbb kellett, hogy érkezzék, mint A_{n+1} . Így A_{n+2} , aki találkozott A_{n+1} -gyel, de feltevésünk szerint nem találkozott házastársával, A_2 -vel, csak A_2 távozása után érkezhett. Hasonlóan A_{n+3} -nak A_3 távozása után kellett érkeznie és így tovább. Így azonban az n -edik lépésben azt kapjuk, hogy az A_{2n} -nel találkozó A_1 csak azután érkezhethet a betegágyhoz, miután A_n -nel találkozó házastársa, A_{n+1} eltávozott, holott abból indultunk ki, hogy A_1 előbb érkezett mint A_{n+1} .

Nem lehet tehát, hogy egyik látogató se találkozzék a betegágynál a házastársával.