

I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy a kifejezést közös nevezőre hozva a számláló osztható a nevezővel, közelebből azt, hogy a nevező tényezői kiemelhetők a számlálóból, a visszamaradó tényező x, y, z -nek egész együtthatós polinomja. Így ha x, y, z egész, akkor a kifejezés értéke is egész szám.

A közös nevezőre hozott alak

$$(2) \quad \frac{x^n(y-z) + y^n(z-x) + z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}.$$

Itt $n = 0$ -ra a számláló

$$(y-z) + (z-x) + (x-y) = 0,$$

s így 0 a kifejezés értéke. Másrészt ebből

$$x-y = -(y-z) - (z-x).$$

Ezt felhasználva a számláló tetszés szerinti n -re a következőképpen alakítható:

$$(x^n - z^n)(y-z) + (y^n - z^n)(z-x).$$

Ez $n = 1$ -re 0-t ad, ha pedig $n \geq 2$, akkor $(x-z)(y-z)$ -t, kiemelve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & (x-z)(y-z)[x^{n-1} + x^{n-2}z + \dots + xz^{n-2} + z^{n-1} - \\ & \quad - y^{n-1} - y^{n-2}z - \dots - yz^{n-2} - z^{n-1}] = \\ & = (x-y)(x-z)(y-z)[(x^{n-2} + x^{n-3}y + \dots + xy^{n-3} + y^{n-2}) + \\ & \quad + z(x^{n-3} + \dots + y^{n-3}) + \dots + z^{n-2}]. \end{aligned}$$

Itt a szögletes zárójelben x, y, z -nek egész együtthatós polinomja áll állításunknak megfelelően. (Az $n = 2$ esetben a szögletes zárójelben csak az utolsó tag, az $n = 3$ esetben pedig csak az első kifejezés és az utolsó tag lép fel.)

Megjegyzés. 1. Ha $n \geq 2$, a szögletes zárójelben egyszerű felépítésű polinom keletkezett: azoknak az x, y, z hatványait tartalmazó szorzatoknak az összege, amelyekben a hatványkitevők összege $n-2$.

2. Sok versenyző a feladat állítását bizonyítottan vélte annyit mutatva meg, hogy a (2) alatti kifejezés számlálóját osztható külön-külön az $x-y, x-z, y-z$ egészekkel. Ebből azonban csak akkor következtethetnénk arra, hogy ezek szorzatával is osztható a számláló, ha a három különbség semelyik kettőjének nem volna 1-nél nagyobb közös osztója; ez azonban általában nem teljesül.

Helyessé tehető ez az okoskodás, ha a számlálót és nevezőt az x, y, z változók polinomjának tekintjük. Ekkor az $x-y, x-z, y-z$ polinomoknak nincs változót tartalmazó közös osztója, és mindegyik kiemelhető a számlálóban szereplő polinomból. Ebből az egész együtthatós polinomok körében is következik, hogy a három kifejezés szorzata is kiemelhető a számlálóból. Néhány versenyző ezen az úton helyes bizonyítást adott a feladat állítására, ezzel azonban lényegesen mélyebb tételt használt fel bizonyítatlanul, mint a bizonyítandó állítás.

Helyessé tehető azonban ez a gondolatmenet a gyöktényezők kiemelésére vonatkozó tételt a következő alakban használva fel: *Ha egy $f(x)$ polinomnak gyöke a t szám, akkor $f(x)$ felbontható $x-t$ -nek és egy polinomnak a szorzatára. Ha $f(x)$ egész együtthatós, és t is egész szám, akkor $x-t$ szorzója is egész együtthatós polinom.* Ez könnyen leolvasható a gyöktényező kiemelésére vonatkozó szokásos bizonyításokból például a következő módon: Legyen

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{és} \quad f(t) = 0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(t) = a_0(x^n - t^n) + a_1(x^{n-1} - t^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - t) = \\ &= (x-t)[a_0(x^{n-1} + x^{n-2}t + \dots + t^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + \dots + t^{n-2}) + \dots + a_{n-1}] = \\ &= (x-t)[a_0x^{n-1} + (a_0t + a_1)x^{n-2} + (a_0t^2 + a_1t + a_2)x^{n-3} + \dots + \\ & \quad + (a_0t^{n-1} + a_1t^{n-2} + \dots + a_{n-1})]. \end{aligned}$$

Ha itt az a_i együtthatók és t egész szám, akkor nyilvánvalóan egész együtthatós a szögletes zárójelben levő kifejezés is.

Ennek alapján a feladat állítása így látható be:

II. megoldás. A (2) kifejezés számlálóját 0, ha n értéke 0 vagy 1. Ha $n \geq 2$, akkor rendezzük a kifejezés számlálóját x hatványai szerint, és végezzük el a kínálkozó kiemelést:

$$\begin{aligned} (3) \quad & x^n(y-z) - x(y^n - z^n) + yz(y^{n-1} - z^{n-1}) = \\ & = (y-z)[x^n - x(y^{n-1} + y^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) + yz(y^{n-2} + \dots + z^{n-2})]. \end{aligned}$$

(Itt $n = 2$ esetén a szögletes zárójelben az utolsó tag utolsó tényezőjén az 1 számot kell érteni.) Tekintsük ezt most az x változó polinomjának, y és z pedig jelentsenek adott különböző egész számokat. Ekkor (3) bal oldala eltűnik az $x = y$ helyen, így a jobb oldal második tényezője is, mert y és z különböző. Ez a tényező egész együtthatós és y is egész, így kiemelhető az $x - y$ tényező és kiemelése után egy egész együtthatós polinom marad vissza.

Ez a polinom eltűnik az $x = z$ helyen, mert (3) bal oldala eltűnik, viszont a jobb oldalon az előző kiemelés után keletkezett $(y - z)(x - y)$ szorzat nem tűnik el, mivel y és z különböző. Így kiemelhető még az $x - z$ tényező is és ismét x egész együtthatós polinomja marad vissza. Ha az így átalakított számlálóban x helyébe is az adott egész értéket helyettesítjük, azt kapjuk, hogy a számláló az $(y - z)(x - y)(x - z)$ szorzatnak egy egész többszöröse, tehát a (2) kifejezés egész szám.

III. megoldás. Jelöljük az (1) kifejezést $P_n(x, y, z)$ -vel. Teljes indukcióval fogjuk bizonyítani, hogy ez az x, y, z változók egész együtthatós polinomja.

Az állítás $n = 0$ -ra igaz, mert $P_0(x, y, z)$ azonosan 0.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n = k$ értékre $P_k(x, y, z)$ egész együtthatós polinom. Kiküszöbölve $P_{k+1}(x, y, z)$ -ből és $P_k(x, y, z)$ -ből a harmadik tagot a következő azonossághoz jutunk:

$$P_{k+1}(x, y, z) - zP_k(x, y, z) = \frac{x^{k+1} - zx^k}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^{k+1} - zy^k}{(y-x)(y-z)} = \frac{x^k - y^k}{x-y},$$

azaz

$$(4) \quad P_{k+1}(x, y, z) = zP_k(x, y, z) + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}),$$

ahol $k = 0$ -ra a zárójelben álló összeg 0-val helyettesítendő. Ebből azonnal következik, hogy $P_k(x, y, z)$ -vel együtt $P_{k+1}(x, y, z)$ is x, y, z egész együtthatós polinomja. Állításunk tehát minden nem negatív egész n -re érvényes.

Megjegyzés. A (4) azonosság mindjárt módot is ad a $P_n(x, y, z)$ polinomok lépésről lépésre történő – úgynevezett rekurzív – meghatározására. Megkaphatjuk ebből $P_n(x, y, z)$ explicit előállítását is, teljes indukcióval bebizonyíthatjuk az I. megoldáshoz fűzött 1. megjegyzés állítását.

IV. megoldás. Az (1) kifejezést tekinthetjük a

$$P_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{x_1^n}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_k)} + \\ + \frac{x_2^n}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_k)} + \dots + \frac{x_k^n}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

kifejezések speciális esetének, ha $k = 3$. Értelem szerint $P_n(x_1)$ -en x_1^n -t értjük. Az alábbi megfontolások erre az esetre is érvényesek. Megmutatjuk, hogy ezek a kifejezések minden k -ra és tetszés szerinti nem negatív egész n -re a változók egész együtthatós polinomjai.

A bizonyítás történhetik a változók számára vonatkozó teljes indukcióval. A $k = 1$ értékre

$$P_n^{(1)}(x_1) = x_1^n$$

az x_1 változó egész együtthatós polinomja.

Tegyük fel, hogy ha k valamilyen $l - 1$ értékkel egyenlő (ahol $l - 1 \geq 1$), akkor $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-1})$ a változónak egész együtthatós polinomja. Ekkor képezzük a

$$P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1}) - P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l)$$

kifejezést. Itt az x_i^n számlálójú tag mindkét kifejezésben fellép, ha $l > 2$ és $i \leq l - 2$, a nevezők pedig egyenlővé válnak, ha az első törtet $x_i - x_l$ -lel, a másodikat $x_i - x_{l-1}$ -gyel bővítjük. Ekkor a számlálóban

$$x_i^n(x_i - x_l) - x_i^n(x_i - x_{l-1}) = x_i^n(x_{l-1} - x_l)$$

lesz, tehát a két tört összevonásával az

$$\frac{x_i^n(x_{l-1} - x_l)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{l-1})(x_i - x_l)}$$

tag keletkezik. Az első, ill. második kifejezés utolsó tagját $x_{l-1} - x_l$ -lel bővítve így alakítjuk át:

$$\frac{x_{l-1}^n}{(x_{l-1} - x_1) \dots (x_{l-1} - x_{l-2})} = \frac{x_{l-1}^n(x_{l-1} - x_l)}{(x_{l-1} - x_1) \dots (x_{l-1} - x_{l-2})(x_{l-1} - x_l)},$$

ill.

$$- \frac{x_l^n}{(x_l - x_1) \dots (x_l - x_{l-2})} = \frac{x_l^n(x_{l-1} - x_l)}{(x_l - x_1) \dots (x_l - x_{l-2})(x_l - x_{l-1})}.$$

Így a következő azonosságra jutunk, kiemelve a minden tagban közös $(x_{l-1} - x_l)$ tényezőt:

$$(5) \quad P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1}) - P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l) = (x_{l-1} - x_l)P_n^{(l)}(x_1, \dots, x_l).$$

Itt a bal oldalon $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_{l-1})$ és $P_n^{(l-1)}(x_1, \dots, x_{l-2}, x_l)$ az indukciós feltevés szerint a változók egész együtthatós polinomja; az utóbbi úgy nyerhető az előbbiből, hogy x_{l-1} helyébe x_l -et írunk. Így az egyiket x_{l-1} , a másikat x_l hatványai szerint rendezve a két kifejezésben x_{l-1} , ill. x_l egyenlő hatványainak megegyezik az együtthatója. A különbségben ezeket a közös együtthatókat kiemelve $x_{l-1}^r - x_l^r$ alakú különbségek lépnek fel. Ezek mindegyikéből, s így (5) bal oldalából is kiemelhető az $x_{l-1} - x_l$ tényező. A visszamaradó tényező, ami (5) szerint $P_n^{(l)}(x_1, \dots, x_l)$ -et adja, az $x_1, \dots, x_l$ változók egész együtthatós polinomja. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Megjegyzések. 1. A bizonyítást lépésről lépésre követve az is könnyen bizonyítható teljes indukcióval, hogy $P_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$ az $x_1, \dots, x_k$ változók hatványaiból képezett összes olyan szorzatok összege, amelyekben a kitevők összege $n - k + 1$, ha $n \geq k$; $P_n^{(k)}$ azonosan egyenlő 1-gyel, ha $n = k - 1$, ha pedig $n \leq k - 1$, akkor 0-val.

2. Az eddigi bizonyítások mindegyike felhasználta az

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$$

azonosságot. A következő – lényegében ARATÓ PÉTER dolgozatából származó – megoldásban erre sincs szükség.

V. megoldás. A

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + xz + yz)t - xyz$$

kifejezés, mint t polinomja nyilván eltűnik a $t = x$, $t = y$, $t = z$ helyeken és ugyanez áll a kifejezés t^n -szeresére is. Így ha t az x , y , z akármelyikét jelenti, azonosan teljesül, hogy

$$(6) \quad \begin{aligned} t^{n+3} &= t^{n+2}(x + y + z) - t^{n+1}(xy + xz + yz) + t^nxyz, \\ (t = x, \quad \text{vagy} \quad t = y, \quad \text{vagy} \quad t = z) \end{aligned}$$

(ami különben közvetlenül is könnyen belátható).

Jelöljük a feladatban szereplő kifejezést $P_n(x, y, z)$ -vel, amint a III. megoldásban is tettük, akkor $P_{n+3}(x, y, z)$ tagjainak számlálójában felhasználva a (6) azonosságokat, a következő azonossághoz jutunk:

$$\begin{aligned} P_{n+3}(x, y, z) &= (x + y + z)P_{n+2}(x, y, z) - (xy + xz + yz)P_{n+1}(x, y, z) + \\ &\quad + xyzP_n(x, y, z). \end{aligned}$$

Ebből látjuk, hogy ha kifejezésünk n három egymásutáni egész értékére a változók egész együtthatós polinomja, akkor ugyanez áll minden nagyobb n egész számra is. Mivel pedig $P_0(x, y, z) = P_1(x, y, z) = 0$, $P_2(x, y, z) = 1$, így $P_n(x, y, z)$ minden nem negatív egész n -re az x , y , z változók egész együtthatós polinomja.

Megjegyzés. Az V. megoldás módszerével is bizonyítható a IV. megoldásban szereplő általánosabb állítás tetszés szerinti adott k -ra, csak ekkor $n = 0, 1, \dots, k - 1$ -re kell meghatározni $P_n^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ értékét.