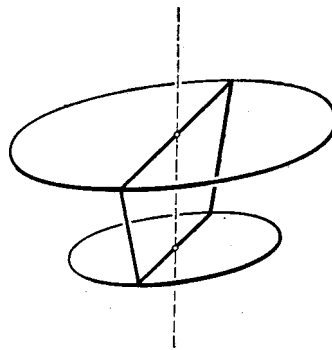


Megjegyzések: 1. Legrövidebben a következő módon indokolhatjuk az állítás helyességét: Tekintsük a testnek egy leghosszabb húrját. E húron átfektetett sík körben metsz, s a húr ennek a körnek átmérője, hiszen különben ennek a körnek, tehát magának a testnek is volna a kiszemelnél hosszabb húrja. Ebből azonban az következik, hogy a test azonos avval a gömbbel, melynek egyik átmérője a kiszemelt húr. – Ez az okoskodás hiányos, mert nem bizonyítja, hogy *van* leghosszabb húr. Okoskodásunk bizonyítássá válnék, ha ezt is bizonyítanók, ehhez azonban a felsőbb matematika eszközeinek használatára volna szükség.

2. A feladat szövegezése félreértésre nem ad lehetőséget. Felvethető mégis a kérdés, mit jelent a »test« szó a szövegben. Felelhetjük, hogy térbeli pontoknak tetszőleges összességét, halmazát jelentheti. Feladatunknak ilyen irányban is szabatos megszövegezése így hangzik: Legyen egy térbeli ponthalmaznak egynél több pontja; rendelkezék e ponthalmaz avval a tulajdonsággal, hogy ha egy síkban egynél több pontja van, akkor e síkban levő pontjai egy körlemez (egy kör belső és határpontjai által alkotott halmazt) alkotnak; bizonyítandó, hogy e térbeli ponthalmaz gömb (egy gömb belső és határpontjainak halmaza). A következő megoldások akkor is hiánytalanok, ha azokat e szabatosabb feladatszövegezés szemüvegén át tekintjük.

I. megoldás. Tekintsük testünknek két párhuzamos síkmetszetét. Ezeknek középpontjain át síkjaikra merőleges síkot fektetünk. E sík a két kört négy pontban metszi (4. ábra).

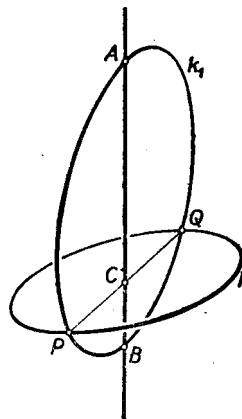


4. ábra

E négy pont által meghatározott trapéz húrnegyszög, hiszen síkja a testet körben metszi; ezért e trapéz szimmetrikus (szemközti szögei kiegészítő szögek, ezért egy párhuzamos oldalon egyenlő szögek nyugszanak). Szimmetrikus trapéznál a párhuzamos oldalak felezőpontjait összekötő egyenes merőleges a párhuzamos oldalakra, így tehát a körközéppontokat összekötő egyenes merőleges a körök síkjaira.

Ezek szerint, ha a két sík egyikét párhuzamosan eltoljuk, az adódó körmetszet középpontja mindig rajt van a másik kör középpontjában síkjára emelt merőlegesen. Ez az egyenes tehát forgástengelye testünknek, testünk forgástest. A forgástengelyen átfektetett sík is körben metszi azonban a testet, és a szimmetria miatt e kör középpontja a forgástengelyen van. A szereplő forgástest tehát gömb.

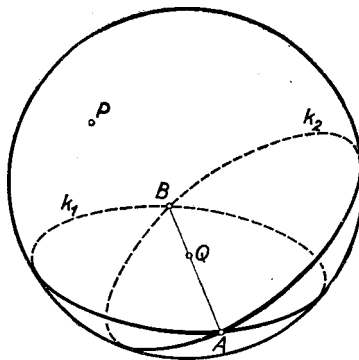
II. megoldás. Tekintsük a testnek egy C középpontú k körmetszetét (5. ábra).



5. ábra

Ennek síkjára C pontban merőlegest állítunk. Fekessünk át egy síkot e merőlegesen. Ez a sík a k kört P és Q pontban, a testet pedig egy k_1 körben metszi. Mivel PQ húrja ennek a körnek, e húr felezőmerőlegese, tehát az eredetileg szerkesztett merőleges k_1 -nek egy AB átmérőjét tartalmazza. Mivel a metsző síkot önkényesen vettük fel, kimondhatjuk, hogy az AB egyenesen átfektetett minden sík AB átmérőjű körben metszi a testet. Testünk ezért az AB átmérőjű gömbbel azonos.

III. megoldás. Ha testünknek egy AB húrján át két síkot fektetünk (6. ábra), két körmetszethez, az egymást A , B pontokban metsző k_1 és k_2 körökhöz jutunk.



6. ábra

E két kör egy G gömböt határoz meg (középpontja a két körközéppontban a körsíkokra emelt merőlegesek metszéspontja, s ezeknek van metszéspontjuk, mert AB felezőmerőleges síkjában vannak, és nem párhuzamosak).

Legyen P testünk felületén egy pont. Fektessünk egy síkot a P ponton és az AB húrnak egy belső Q pontján át. Ez a sík a k_1 és k_2 kört négy pontban metszi, hiszen áthalad mindkét körnek belső pontján, a Q ponton. Ez a négy pont a G gömb felületén egy kört határoz meg. A felvett sík körmetszete is áthalad e négy ponton, ez a két kör tehát azonos. Ezek szerint P is G felületén van, és minden, a Q ponton áthaladó sík által G -ből kimetszett kör testünknek felületén helyezkedik el. Testünk ezért a G gömbbel azonos.

IV. megoldás. Legyen k_1 a testnek egy körmetszete (6. ábra), legyen Q ennek a körlemeznek belső pontja, legyen P a test felületén, de nem a k_1 körön, legyen végül G az a gömb, amelyik áthalad a P ponton és tartalmazza a k_1 kört. A PQ egyenesen átfektetett sík a k_1 kört A és B pontban metszi (hiszen tartalmazza a körnek belső Q pontját), továbbá testünket és a G gömböt is körben metszi. E két kör azonos, mert P , A és B közös pontjaik. E síkmetszetek azonosságából a test és a G gömb azonossága következik.