

**I. megoldás.** Legyen  $2n^2 = kd$ , ahol a feltevés értelmében  $k$  pozitív egész szám. Ha  $n^2 + d$  négyzetszám, akkor valamely  $x$  egész számra

$$x^2 = n^2 + d = n^2 + \frac{2n^2}{k},$$

s ebből következőleg

$$k^2 x^2 = n^2 (k^2 + 2k).$$

Ez azonban lehetetlen, mert a baloldal teljes négyzet, a jobboldal első tényezője is; viszont a második tényező nem teljes négyzet, hiszen

$$k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2,$$

azaz két szomszédos négyzetszám fogja közre.

*Megjegyzések:* 1. Amikor megállapítottuk, hogy  $k$  pozitív, arra építettünk, hogy a feladat csak természetes számokról szól. A feladat szövegezése kifogásolható, mert kifejezetten nem mondja, hogy az állítás csak pozitív  $d$  osztókra vonatkozik. Ilyen megszorítás nélkül nem is helyes a feladat állítása, mert  $d = -n^2$  osztója  $2n^2$ -nek, s ekkor  $n^2 + d = 0$ , ami 0-nak négyzete. Minden más negatív osztóra teljesül a feladat állítása. Ez belátható, ha megtartjuk a megoldás jelöléseit, de most feltételezzük, hogy  $k$  negatív egész szám. Ha  $k = -1$ , akkor  $k^2 + 2k = -1$  nem négyzetszám; ha  $k = -2$ , láttuk, hogy az állítás nem teljesül. Ha viszont  $k < -2$ , akkor

$$(k+2)^2 < (k+2)^2 + 2(-k-2) = k^2 + 2k < (k+1)^2,$$

s ezért  $k^2 + 2k$  ismét nem lehet négyzetszám.

2. A megoldásban hivatkoztunk arra a tényre, hogy ha  $a, b, c$  természetes számok, és  $a^2 = b^2 c$ , akkor  $c$  szükségképpen négyzetszám. Ez következik abból, hogy a természetes számok egyféleképpen bonthatók fel törzsszámok szorzatára. Emiatt  $a^2$  és  $b^2$  felbontásában minden törzstényező páros kitevővel szerepel, mert a négyzetreemelés ilyen törzsfelbontáshoz vezet. Így tehát, az  $a^2 : b^2$  osztás elvégzésével,  $c$ -nek olyan felbontását kapjuk, melyben minden törzstényező páros kitevővel szerepel. Ezért  $c$  négyzetszám.

**II. megoldás.** Legyen újból  $2n^2 = kd$ . Ha a feladat állítása hamis, akkor valamely  $x$  egész számra

$$\frac{k+2}{k} = \frac{n^2+d}{n^2} = \frac{x^2}{n^2}.$$

A baloldali tört számlálójának s nevezőjének különbsége 2, s e különbség a tört egyszerűsítése után csak csökkenhet.

A jobboldali tört egyszerűsítésével  $\frac{p^2}{q^2}$  alakú törthöz jutunk, ahol  $p$  és  $q$  természetes számok, s ezek nem lehetnek egyenlők mert  $n^2 + d \neq n^2$ . Ez utóbbi tört számlálójának és nevezőjének különbsége viszont legalább 3, mert felírható  $p$  és  $q$  összegének és különbségének szorzataként, két egymástól különböző természetes szám összege pedig legalább 3, különbségük meg legalább 1. A fenti egyenlőség tehát nem teljesülhet.

*Megjegyzés:* Amikor megállapítottuk, hogy  $p$  és  $q$  nemcsak egész számok, hanem pozitív egész számok, akkor kirekesztettük a tárgyalásból azt a lehetőséget, hogy az egyenlőségünkben szereplő törtek értéke 0. Bizonyításunk tehát  $k = -2$  kivételével  $k$  minden egész értékére helytálló (összhangban korábbi megjegyzésünkkel).

**III. megoldás.** Ha a feladat állítása hamis, akkor van egy legkisebb olyan  $n$  természetesen szám, amelyhez található az állítást cáfoló  $d$  szám. Kimutatjuk, hogy ennek az  $n$ -nek és  $d$ -nek nem lehet közös  $p$  törzstényezője: Ellenkező esetben ugyanis  $p$  osztója  $(n^2 + d)$ -nek; és mivel ez négyzetszám,  $p^2$  is osztója  $(n^2 + d)$ -nek; akkor  $p^2$  osztója  $d$ -nek is, mert  $n^2$ -nek osztója; tehát az  $n$ -nél kisebb  $\frac{n}{p}$  számra és négyzete kétszeresének  $\frac{d}{p^2}$  osztójára

$$\left(\frac{n}{p}\right)^2 + \frac{d}{p^2} = \frac{n^2 + d}{p^2}$$

négyzetszám, ami ellentmond  $n$  megválasztásának.

Így tehát csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor  $d$  és  $n$  relatív prím. Ez esetben  $d$  csak úgy lehet  $2n^2$ -nek osztója, ha 2-nek is osztója. Ezért  $d$  értéke csak 1 vagy 2 lehet. Viszont sem  $n^2 + 1$ , sem  $n^2 + 2$  nem lehet négyzetszám, hiszen az  $n^2$ -re következő első négyzetszám  $(n+1)^2$ -gyel nagyobb, ami 2-nél több. Lehetetlen tehát az, hogy feladatunk állítása hamis legyen.

*Megjegyzések:* 1. Ha ennél a megoldásnál is kiterjesztjük figyelmünket a negatív osztókra, akkor  $n^2 - 1$  és  $n^2 - 2$  is vizsgálандó. Könnyű megállapítani, hogy közülük csak  $n^2 - 1$ , s csak akkor lehet négyzetszám, ha értéke 0. Ez megfelel korábbi megjegyzéseinknek.

2. Felvetjük a kérdést, hogy vajon igaz marad-e a feladat állítása, ha abban  $2n^2$  helyett  $n^2$ -nek más többszöröse szerepel. Utolsó megoldásunkból látjuk, hogy  $2n^2$  azért felel meg, mert sem 2, sem annak osztója nem írható fel két természetes szám négyzetének különbségként. Van-e más ilyen tulajdonságú  $N$  természetes szám? Mínt hogy

$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ , azért  $N$ -nek nem lehet páratlan törzstényezője,  $N$  csak 2-nek hatványa lehet. Mivel pedig  $8 = 3^2 - 1^2$ , azért  $N$  nem lehet 2-nek sem köbe, sem magasabb hatványa. Tehát  $N$  csak 1, 2 vagy 4 lehet. Ezek a számok meg is felelnek: 1-ről és 2-ről már beláttuk; 4 is megfelel, ugyanis  $n^2 + 4$  sem lehet négyzetszám, mert  $n^2$  és  $(n + 2)^2$  közrefogja, viszont  $(n + 1)^2$  és  $n^2 + 4$  sohasem egyenlő, hiszen különbségük páratlan. Ezzel tehát a feladat állításán túlmenően igazoltuk, hogy *ha  $n$  természetes szám, és  $d$  osztója  $4n^2$ -nek, akkor  $n^2 + d$  nem négyzetszám.*