I. megoldás: [Alakítsuk át a vizsgálandó kifejezést][1]

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

így

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha &= \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} = \\ = \frac{\sin\alpha}{3}(3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) &= \frac{\sin\alpha}{3}(2 + 3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) = \\ &= \frac{\sin\alpha}{3}\Big\{(1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) + (1 + \cos\alpha) + 3\cos^2\alpha\Big\}.\end{aligned}$$

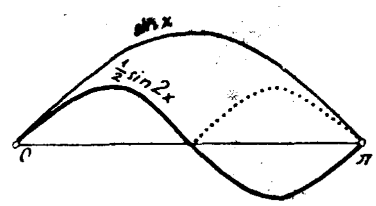
De $\frac{\sin\alpha}{3} > 0$, mert $0^\circ < \alpha < 180^\circ$; $1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha = (1+\cos\alpha)^2 > 0$; $1 + \cos\alpha > 0$, [mert $\cos\alpha > -1$] és $3\cos^2\alpha > 0$; így az egész összeg pozitív.

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha == \frac{\sin\alpha}{3}\Big\{(1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) + (1 + \cos\alpha)3\cos^2\alpha\Big\} > 0.$$

Fried Ervin.

II. megoldás: Kevesebb számolással is célhoz érünk, ha az egyes tagokat grafikusan ábrázoljuk. (Jelöljük a szöget x-szel és számítsuk ívmértékben.)

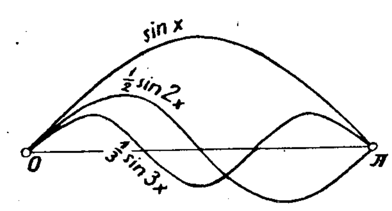
$\frac{1}{2}\sin 2x$ görbéjét úgy kapjuk a $\sin x$-éből, hogy azt a kezdőpontra, mint hasonlósági középpontra nézve felére kicsinyítjük, vagyis a kezdőpontból kiinduló húrok középpontjaiból tevődik össze a görbe első íve; a második ív pedig ugyanolyan, mint az előző, de a tengely alatt.



Ha visszafordítjuk a tengely fölé a negatív ívet, akkor ismét a $\sin x$ felére kicsinyített képét kapjuk, most a $(0,\pi)$ intervallum végpontjából mint hasonlósági középpontból lekicsinyítve. Ez a visszafordított ív is $\sin x$ görbéje alatt marad, tehát

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x > 0 \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < \pi$$

Ha ehhez hozzávesszük $\frac{1}{3}\sin 3x$-et, az csak $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ szakaszon kisebbíti az összeget. Ezen a szakaszon $\sin x \le \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$.



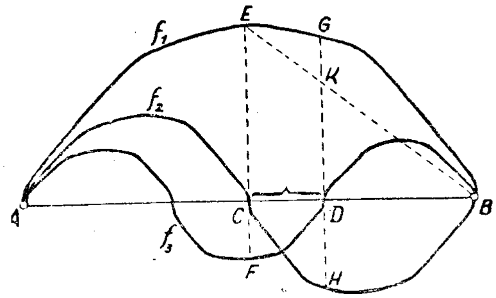
A kivonandók abszolút értéke viszont nem lehet több, mint 1/2 ill. 1/3 és ezek összege $5/6 < \sqrt{3}/2$, mert az előbbi négyzete 25/36, az utóbbié 3/4=27/36. Így

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi.$$

III. Megoldás: Még itt is felhasználtuk a $\sin x$ függvény értékét néhány helyen, pedig elég a görbéjének néhány tisztán geometriai tulajdonságát felhasználni. Azt, hogy a görbe felülről nézve domború, más szóval, hogy bárhol

[1] A versenyzők megoldásait lehetőleg szószerint közöljük. A szerkesztőség kiegészítéseit azögletes zárójellel választjuk el az eredeti szövegtől.

húzva egy húrt, a görbe fölötte fekszik. Azt, hogy a szakasz középmerőlegesére szimmetrikus a görbe és hogy a szakasz végpontjaiban eléri a tengelyt.



Legyen egy tetszőleges ilyen görbénk a tengely egy AB szakaszán. Ez annyiban hasonlít a $\sin x$-ére, hogy a szakasz C középpontjáig emelkedik, onnan viszont süllyed. (Részben futhat párhuzamosan is a tengellyel.) Kicsinyítsük a felére és a harmadára és folytassuk úgy a kapott görbéket, hogy váltakozva a tengely alatt és fölött illesztünk hozzá az elsővel egybevágó íveket.

Megmutatjuk, hogy az így kapott három görbe ordinátáinak összege az egész szakaszon pozitív.

Hogy könnyebben tudjunk beszélni, nevezzük a három görbéhez tartozó függvényt $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$-nek. A domborúság miatt a kicsinyített ívek itt is az eredeti alatt feküsznek, s így könnyen látható, hogy

$$f_1(x)+f_2(x)>0 \quad \text{és} \quad f_1(x)+f_3(x)>0.$$

Csak azon a szakaszon kell alaposabban megnéznünk függvényeinket, ahol f_2 is, f_3 is negatív, tehát a CD szakaszon (a középponttól a szakasz ${}^2/_3$-áig). Ezen a szakaszon a kisebbítendő legkisebb értéke DG. f_3 legnagyobb levonandó értéke $CF=\dfrac{1}{3}CE$, f_2 legnagyobb levonandó értéke pedig DH. DH feleakkora, mint f_1 értéke a szakasz harmadrészén, tehát ugyancsak feleakkora mint f_1 értéke a szakasz kétharmadán, azaz $DH=\dfrac{1}{2}DG$. Kössük össze B-t és E-t és jelöljük BE és DG metszéspontját K-val. Mivel $BD=\dfrac{2}{3}BC$, így egyszersmind $DK=\dfrac{2}{3}CE$. Mivel CF a CE egyharmada, így egyben fele DK-nak. A két levonandó tehát nem lehet több, mint DG fele és DK fele, s így együtt kevesebb, mint DG, ami a kisebbítendő legkisebb értéke. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

Megemlítjük, hogy a feladat speciális esete egy általánosabb tételnek. Fejér Lipót vette észre, hogy

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots+\frac{1}{n}\sin nx>0, \text{ ha } 0<x<\pi$$

bármely pozitív egész n-re. Akik egyetemen fognak matematikát tanulni, be fogják ezt is bizonyítani és fontos alkalmazását is fogják látni.