

a) Legyen $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Megmutatjuk, hogy ha s_n páros, illetve páratlan, akkor minden, a $[-s_n; s_n]$ intervallumbeli páros, illetve páratlan szám előáll $\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ alakban. Ebből a feladat első része azonnal következik, mert vagy minden páros szám, vagy minden páratlan egész szám előáll néhány a_n előjeles összegeként.

Állításunk igaz $n = 1$ esetén, mert a feltételek miatt $s_1 = a_1 = 1$. Tegyük fel, hogy igaz $n = k$ -ra; bebizonyítjuk $n = k + 1$ esetén is. Az indukciós feltevés alapján $(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{k-1}) - a_k$ alakban előáll az összes $[-s_{k-1} - a_k; s_{k-1} - a_k]$ -beli, $(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{k-1}) + a_k$ alakban pedig az összes $[-s_{k-1} + a_k; s_{k-1} + a_k]$ -beli, megfelelő paritású szám. De $s_{k-1} + a_k = s_k$, $s_{k-1} - a_k \geq (k-1) \cdot 1 - k = -1$ miatt ez a két intervallum a 0 kivételével biztosan tartalmazza az összes $-s_k$ és s_k közötti egész számot. Ha a 0 nem szerepel az intervallumokban, az csak úgy lehet, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$ és $a_k = k$, akkor viszont $s_k = 2k - 1$ páratlan, tehát a 0-t nem is kell előállítanunk.

b) Elég egy ellenpéldát mutatnunk. Legyen $a_n = 100n$, ha n 10-hatvány, ellenkező esetben legyen $a_n = 1$. Erre a sorozatra $\frac{a_n}{n} \leq 100$.

Ha $10^k \leq n < 10^{k+1}$, akkor tetszőleges előjelek esetén

$$\begin{aligned} || \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n | - 100 \cdot 10^k | &\leq (a_1 + a_2 + \dots + a_{10^k-1}) + (a_{10^k+1} + \dots + a_n) = \\ &= 100 \cdot (10^0 + 10^1 + \dots + 10^{k-1}) + n - k - 1 < 100 \frac{10^k - 1}{9} + 10^{k+1} < 22 \cdot 10^k. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $| \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n |$ csak az $I_k = (78 \cdot 10^k; 122 \cdot 10^k)$ intervallumban lehet.

Ezek az intervallumok diszjunktak, mert

$$78 \cdot 10^{k+1} - 122 \cdot 10^k = 658 \cdot 10^k,$$

sőt az intervallumok közötti hézagok mérete minden határon túl nő. Ezért tetszőleges számtani sorozatnak van olyan eleme, amelyet egyik intervallum sem tartalmaz.

Megjegyzés. Akik csak a feladat első felét oldották meg, 2 pontot kaptak.