I. megoldás. Az egymáshoz valamelyik lapsíkjukon illeszkedő kis téglatesteken lépegetve igazolható, hogy a kis téglatestek mindegyik lapsíkja párhuzamos a nagy téglatest valamelyik lapjával, amiből következik, hogy azonos helyzetűek.

Vegyünk fel a lapokkal párhuzamosan, egymástól pontosan $\frac{1}{2}$ távolságra párhuzamos síkokat úgy, hogy szerepeljen ezek között a nagy téglatestnek három, egymásra merőleges lapsíkja is. A síkok a teret $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ méretű kockákra osztják fel. A kockákat színezzük ki fehérre és feketére úgy, hogy a szomszédosak különböző színűek legyenek. A feladat állítása a következő két segédtételből triviálisan következik:

a) Ha egy téglatestnek van egész hosszúságú éle, akkor az általa tartalmazott fekete, illetve fehér térrészek térfogata megegyezik.

b) Ha a nagy téglatest által tartalmazott fehér és fekete térrészek térfogata megegyezik, akkor van egész hosszúságú éle.

Az a) állítás triviális.

Legyen a nagy téglatest éleinek hossza a, b, c. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a fehér és fekete részek térfogatának különbsége $\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|$, ahol $\|x\|$ az x szám távolsága a legközelebbi egésztől. Ha ez 0, akkor a, b, c valamelyike egész.

II. megoldás. A téglatest felbontásához egy gráfot rendelünk.

Legyenek a gráf csúcsai azok a pontok a térben, amelyek csúcsai legalább egy téglatestnek. Minden egyes kis téglatesten tekintsünk négy párhuzamos, egész hosszúságú élt; ezek legyenek a gráfnak is élei. (Ha egy kis téglatestnek több egész hosszúságú éle is van, akkor is csak az egyik élnégyesből készítsünk éleket.) A gráfnak lehetnek többszörös élei; két csúcsot pontosan annyi él köt össze, ahány téglatest egész hosszúságú élének végpontjai.

Minden pont annyiadfokú, ahány kis téglatestnek csúcsa. Emiatt a nagy téglatest csúcsai elsőfokúak. Azt állítjuk, hogy a többi csúcs fokszáma páros. Tekintsünk egy pontot, amely nem csúcsa a nagy téglatestnek. Fektessünk a ponton keresztül a téglatestek lapjaival párhuzamos síkokat. Ezek a teret nyolc részre osztják. Egy olyan téglatest, amelynek az illető pont csúcsa, 1 térnyolcadot foglal el, ha pedig a pont egy téglatest belsejébe, lapjának belsejébe vagy élének belsejébe esik, akkor 8, 4, illetve 2, de mindenképpen páros számú térrészt. Mivel a pont maga is a nagy téglatest belsejébe, lapjának belsejébe vagy élének belsejébe esik, a kis téglatesteknek szintén páros számú térrészt kell elfoglalniuk. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha az 1 térrészt elfoglaló kis téglatestek száma páros.

Tekintsük a gráfnak egy olyan összefüggő komponensét, amely tartalmazza a nagy téglatest egyik csúcsát. Ebben a fokszámok összege páros (az élek számának kétszerese), és tartalmaz páratlan fokú csúcsot: a nagy téglatest egyik csúcsát. Ekkor viszont még legalább egy páratlan fokú csúcsot kell tartalmaznia, ami csak a nagy téglatest egy másik csúcsa lehet. Létezik tehát a gráfban olyan út, amely összeköti a nagy téglatest két csúcsát.

Tekintsük a nagy téglatestnek két olyan különböző lapsíkját, amelyek a két, úttal összekötött csúcsot tartalmazzák. Az úton végighaladva, a síkokra merőlegesen minden lépésnél egész hosszúságút lépünk, ezért a két sík távolsága egész szám.

Megjegyzés. A témával kimerítően foglalkozik Stan Wagon *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle* c. cikke (American Math. Monthly, Vol. 94 (1987) No. 7. 601–617. old.).