

I. megoldás. Defináljuk a következő függvénysorozatot:

$$(1) \quad f_0(x) = \frac{1}{x}; \quad f_{m+1}(x) = f_m(x) - f_m(x+1).$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(1) \quad f_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\binom{m}{k}}{x+k} = \frac{m!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}.$$

Ebből az állítás következik, mert $m = 2n$ esetén a bal oldalon (1) bal és jobb oldalának különbsége, a jobb oldalon pedig egy pozitív szám áll.

Ha $m = 0$, akkor állításunk triviális. Másrészt (2) öröklődik m -ről $(m+1)$ -re:

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x) &= f_m(x) - f_m(x+1) = \\ &= \left(\frac{\binom{m}{0}}{x} + \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{\binom{m}{k}}{x+k} \right) - \left(\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \frac{\binom{m}{k-1}}{x+k} + (-1)^m \frac{\binom{m}{m}}{x+m+1} \right) = \\ &= \frac{\binom{m+1}{0}}{x} + \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}}{x+k} + (-1)^{m+1} \frac{\binom{m+1}{m+1}}{x+m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \frac{\binom{m+1}{k}}{x+k}, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} f_{m+1}(x) &= f_m(x) - f_m(x+1) = \\ &= \frac{m!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)} - \frac{m!}{(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)} = \\ &= \frac{m!((x+m+1)-x)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)} = \frac{(m+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m+1)}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Tetszőleges f függvényre és páronként különböző $x_0, x_2, \dots, x_n$ pontokra az

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ &\dots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

kifejezést az f függvénynek az adott pontokhoz tartozó osztott differenciájának nevezik, és $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ -fel jelölik. Ismeretes, hogy ha f n -szer differenciálható, akkor létezik olyan ξ szám, amely az $x_0, \dots, x_n$ számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik, továbbá $[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. (Ennek a tételnek speciális esete a Lagrange-közértéktétel.)

Ha $f(x) = \frac{1}{x}$ és $x_k = x+k$, akkor a tétel szerint létezik olyan $x < \xi < x+2n$ szám, amelyre (1) bal és jobb oldalának különbsége éppen $f^{(2n)}(\xi) = \frac{(2n)!}{\xi^{2n+1}}$.

II. megoldás. Mivel tetszőleges $\alpha > 0$ esetén $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha}$, (1) bal és jobb oldalának különbsége:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{\binom{2n}{k}}{x+k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \int_0^1 t^{x+k-1} dt = \int_0^1 t^{x-1} \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} t^k \right) dt = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{2n} dt > 0.$$

Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. A $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ függvény neve *Euler-féle béta-függvény*. Ez az integrál tetszőleges

pozitív x, y -ra létezik. Ha x és y pozitív egészek, akkor $B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$. Ez lehetőséget ad többek között a binomiális együtthatók definíciójának olyan kiterjesztésére, amikor az argumentumok nem egészek, például definiálható akár $\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)$ is.