

Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D -vel, oldalainak felezőpontjait X, Y, V, Z -vel, az átlók felezőpontjait S -sel és T -vel, az S -en és T -n át a másik átlóval húzott párhuzamosok metszéspontját pedig P -vel. Az $XYVZ$ négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalainak hossza egyenlő ($XY = VZ = \frac{BD}{2}$ és $XZ = YV = \frac{AC}{2}$), ugyanis oldalai az ABD, CBD, DAC és BAC háromszögek BD , illetve AC oldalához tartozó középvonalai. Az $ABCD$ négyszög konvexitása miatt $XYVZ$ az $ABCD$ belsejében van, T, S és P pedig az $XYVZ$ paralelogramma belső pontjai.

Mivel $PS \parallel AC \parallel XZ \parallel YV$, azért $T_{PYV} = T_{SYV}$ és $T_{PXZ} = T_{SXZ}$, és így $T_{PYBV} = T_{SYBV}$, valamint $T_{PXDZ} = T_{SXDZ}$. Viszont S a BD átló felezőpontja, ezért az $SYBV$ és az $SXDZ$ konvex négyszögek két-két átlójának hossza megegyezik, és $XZ \parallel YV$ miatt az átlók által bezárt szög is egyenlő. Ebből viszont következik, hogy a két négyszög területe is egyenlő, $T_{SYBV} = T_{SXDZ}$. Az SX és SY , illetve az SV és SZ szakaszok az ABD , illetve a CBD háromszög

középvonalai, ezért (lásd a 2. ábrát) $T_{AXSY} = \frac{1}{2}T_{ABD}$ és $T_{CZSV} = \frac{1}{2}T_{CBD}$. Tehát

$$\begin{aligned} T_{PYBV} = T_{SYBV} &= \frac{1}{2}(T_{SYBV} + T_{SXDZ}) = \frac{1}{2}(T_{ABCD} - (T_{AXSY} + T_{CZSV})) = \\ &= \frac{1}{2}\left(T_{ABCD} - \frac{1}{2}(T_{ABD} + T_{CBD})\right) = \frac{1}{2}\left(T_{ABCD} - \frac{1}{2}T_{ABCD}\right) = \frac{1}{4}T_{ABCD}. \end{aligned}$$

Az eddigiekből ugyanúgy következik, hogy $T_{PXDZ} = \frac{1}{4}T_{ABCD}$; ha pedig a bizonyításban az S pont szerepét a T pont, a $PYBV$ és a $PXDZ$ négyszögek szerepét pedig a $PYAX$ és a $PZCV$ négyszögek veszik át, akkor ugyanígy belátható, hogy $T_{PYAX} = T_{PZCV} = \frac{1}{4}T_{ABCD}$.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.