Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b$. Ha $c \leq b$, akkor az

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{c \text{ darab}},\ \underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{a-c \text{ darab}},\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{b-c \text{ darab}})(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = (\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{c \text{ darab}},\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{a-c \text{ darab}},\ \underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{b-c \text{ darab}})$$

választással teljesülnek a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c$ összefüggések.

Ha $c > b$, akkor $ab > c^2$ miatt $a > b$. Vizsgáljuk tehát az $a > c > b$ esetet. $a + b$ szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $a + b = 0$, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy valamilyen N természetes számmal $a + b \leq N$ esetén már igazoltuk a feladat állítását az $(a,\ b,\ c)$ számhármasra, és vizsgáljuk az $a + b = N + 1$ esetet.

Az $(a+b-2c,\ b,\ c-b)$ számhármasra teljesülnek a feladat feltételei, mert $ab > c^2$ miatt $(a+b-2c)b = ab+b^2-2cb > (c-b)^2$, és $c > b$ miatt nyilván $a + b - 2c + b < a + b - 2b + b < a + b = N + 1$, így az indukciós feltevés alapján valamilyen n, $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ egészekkel $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a + b - 2c$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c - b$ teljesül.

Ekkor $x_i' = x_i + y_i$ választással

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = (a + b - 2c) + 2(c - b) + b = a$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = (c - b) + b = c,$$

tehát az $x_1', x_2', \ldots, x_n', y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokkal teljesülnek a kívánt összefüggések a, b, c-re is. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Elnézést kérünk a gyakorlatot megoldani próbálkozóktól, a megoldás, bár csak elemi eszközöket igényelt, mégis gyakorlatnak meglehetősen nehéz.