I. megoldás. Legyen a gömb sugara R, a henger alapkörének sugara r, a henger magassága h. Mivel a henger és a gömb középpontja egybeesik, a Pitagorasz-tétel alapján $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$, a felszín és a térfogat hányadosa pedig

$$\frac{A}{V} = \frac{2\pi r(h+r)}{\pi r^2 h} = \frac{2}{r} + \frac{2}{h} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Alkalmazzuk a súlyozott harmonikus és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget az $\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$ és $\sqrt{R^2 - r^2}$ számokra a $\sqrt[3]{4}$ és 1 súlyokkal:

$$\left(\sqrt[3]{4}+1\right)\frac{V}{A}=\frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{r}+\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}}\le\sqrt{\frac{\sqrt[4]{4}\cdot\left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2+\sqrt{R^2-r^2}^2}{\sqrt[3]{4}+1}}=\frac{R}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}},$$

átrendezve

$$\frac{A}{V}\ge\frac{\left(\sqrt[3]{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{R}.$$

A felszín és a térfogat hányadosát sikerült alulról becsülnünk egy, csak a gömb sugarától függő mennyiséggel. Egyenlőség akkor áll fenn, ha ugyanannak a két számnak vettük a közepeit, azaz $\frac{r}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt{R^2-r^2}$. Ebből r-et kifejezve

$$r=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R \qquad \text{és} \qquad h=2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R.$$

Ebben az esetben lesz a felszín és a térfogat hányadosa minimális, azaz $\frac{\left(\sqrt[3]{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{R}$.

II. megoldás. Legyen $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Az előző megoldás szerint ennek a függvénynek a minimumát keressük a $(0;R)$ intervallumban. Ezt a derivált előjelének vizsgálatával végezzük.

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{x}{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^3-2(R^2-x^2)^{3/2}}{x^2(R^2-x^2)^{3/2}}.$$

A vizsgált intervallumban az utolsó tört nevezője mindig pozitív, a számlálója szigorúan monoton nő. Értéke akkor 0, amikor $x^3-2(R^2-x^2)^{3/2}=0$, azaz $x=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R$.

A $\left(0;\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R\right)$ intervallumban $f'<0$, és a függvény szigorúan monoton fogy, a $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R;R\right)$ intervallumban pedig $f'>0$, és f szigorúan monoton nő. A függvény minimuma ezért az $x=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}}R$ pontban van.

Megjegyzés. A feladatot deriválással megoldók között típushiba volt, hogy csupán a derivált nullhelyét keresték meg, de egyáltalán nem, vagy rosszul indokolták meg, hogy ott miért minimum van. Az sem teljes megoldás, ha valaki a második derivált előjele alapján csak annyit állapított meg, hogy az adott helyen a függvénynek *lokális* minimuma van.