

A háromszög magasságpontja, súlypontja, körülírt körének középpontja rendre legyen M , S , O . Az M , F , S , O pontok a leírt sorrendben a háromszög Euler-egyenesén vannak, és mivel $MS = 2 \cdot SO$, $MF = FS = SO = \frac{1}{3} \cdot MO$.

A súlypontból a háromszög csúcsaiba mutató vektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, továbbá $\mathbf{v} = \overrightarrow{SO}$. Ekkor $\overrightarrow{SF} = -\mathbf{v}$, és így

$$\begin{aligned} AF^2 + BF^2 + CF^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{v})^2 + (\mathbf{b} + \mathbf{v})^2 + (\mathbf{c} + \mathbf{v})^2 = \\ &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2, \quad \text{hiszen} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Hasonlóan számítható ki $3r^2$, és pedig

$$\begin{aligned} 3r^2 &= OA^2 + OB^2 + OC^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{v})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{v})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{v})^2 = \\ &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 3\mathbf{v}^2, \end{aligned}$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)