

Feltehető, hogy a P pont az A_1A_n íven van. Jelöljük a PA_1 ívhez tartozó középponti szöveget α -val, így a PA_2, \dots, PA_n ívekhez tartozó középponti szögek: $\alpha + \frac{2\pi}{n}, \dots, \alpha + \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n}$. Ha a kör sugara r , akkor pl. a PA_1 húr hossza $2r \sin \frac{\alpha}{2}$. A vizsgált összeget S -sel jelölve:

$$S = 16r^4 \left(\sin^4 \frac{\alpha}{2} + \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \right).$$

Felhasználjuk, hogy $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, így

$$\begin{aligned} S &= 16r^4 \left[\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1 - \cos \left(\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n} \right)}{2} \right)^2 \right] = \\ &= 16r^4 \left\{ \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \left[\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left[\cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \cos^2 \left(\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Az első szögletes zárójelben lévő összeg a

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \dots + \cos(x+ky) = \frac{\sin \frac{(k+1)y}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{ky}{2} \right)}{\sin \frac{y}{2}}$$

azonosság szerint 0 (bizonyítását lásd pl. *Skljarszkij-Csencov-Jaglom*: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből (Tankönyvkiadó, 1967) I. 225.b feladatánál).

A $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ összefüggést alkalmazva:

$$S = 16r^4 \left\{ \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{1}{8} \left[\cos 2\alpha + \cos \left(2\alpha + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(2\alpha + \frac{(n-1)4\pi}{n} \right) \right] \right\},$$

ahol a szögletes zárójelben az előbb említett azonosság szerint 0 van.

Azt nyertük, hogy $S = 6n \cdot r^4$, ami valóban független P választásától.

Gerbicz Róbert (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) és *Megyeri Csaba* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV.

o.t.)

Megjegyzések. 1. *Páles Csaba* (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn.) az egységnyi sugarú körbe írt n -oldalú szabályos sokszöget úgy helyezte el, hogy a csúcsainak megfelelő komplex számok az n -edik egységgyökök legyenek, a P ponthoz pedig a z komplex számot rendelte. Legyenek az egységgyökök $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, ekkor $S = |z - \varepsilon_1|^4 + |z - \varepsilon_2|^4 + \dots + |z - \varepsilon_n|^4$, amiből némi számolással $S = 6n$, illetve r sugarú kör esetén $S = 6n \cdot r^4$.

2. *Megyeri Csaba* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.) megmutatta, hogy a szabályos sokszög O középpontjától d távolságra fekvő tetszőleges P pont esetén a vizsgált összeg csak a d -től függ, tehát az O középpontú, d sugarú kör bármely pontjára is állandó.