

Mivel a bal oldalon lévő szorzat tényezői pozitív számok, a szorzat köbgyöke becsülhető a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel:

$$\sqrt[3]{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)} \leq \frac{\alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \alpha}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Így elég azt bizonyítanunk, hogy $\left(\frac{2}{3}\pi\right)^3 \leq 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{R}{s}$, azaz

$$(1) \quad \frac{s}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Tekintve, hogy $\frac{s}{R} = \frac{a+b+c}{2R}$ és pl. $\frac{a}{2R} = \sin \alpha$, a bizonyítandó állítás így alakul:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A szinuszfüggvény a $(0; \pi)$ -ban konkáv, ezért Jensen tétele szerint (bizonyítása megtalálható *Molnár Emil: Matematika versenyfeladatok gyűjteménye*, 518. old.):

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel átalakításaink megfordíthatók, utóbbi egyenlőtlenségünk ekvivalens (1)-gyel. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $\alpha = \beta = \gamma$, tehát szabályos háromszög esetén.

Nyakas Péter (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.)