A különböző alakú egységnyi területű háromszögek közül azokat kell megkeresnünk, amelyekbe maximális területű négyzet írható. Első lépésként megmutatjuk, hogy a maximális területű négyzet csúcsai szükségképpen a háromszöglemez határán lesznek. Ha a beírt négyzetnek legalább két csúcsa a háromszög belső pontja (*1. ábra*), akkor a háromszögnek van olyan csúcsa, amelyikből a nézetet nagyítva egy csúcs képe a kerületre kerül. Ezt ismételve elérhetjük, hogy három négyzetcsúcs a háromszög határán legyen, miközben a négyzet területe növekszik.

A *2. ábrán* a négyzet három csúcsa a háromszög oldalaira illeszkedik. Az ábra jelöléseivel $XY \parallel BC$, és feltehetjük, hogy $PB \leq PY$ és $CR \geq RX$. A PS egyenes a BC-t D-ben, az AC-t E-ben metszi. A $PB \leq PY$ feltevés miatt a PBD háromszög területe nem nagyobb, mint a PSY háromszögé. Ezért a CDE háromszög területe kisebb, mint az ABC háromszögé. Ha most a CDE háromszöget – a négyzettel együtt – úgy nagyítjuk, hogy területe egységnyi legyen, akkor a $PQRS$ négyzet területe is növekedni fog.

Az elmondottakból az látszik, hogy a maximális területű négyzet a *3. ábra* szerint úgy helyezkedik el a háromszögben, hogy egyik oldala azon a háromszög-oldalon van, amelyiknek egyik csúcsában sincs tompaszög. Az ábra jelöléseivel az ASR és az ABC háromszögek hasonlóságából $x : d = (x+d) : BC$, amiből $BC = \dfrac{d(x+d)}{x}$. Így a háromszög területe $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{d}{x} \cdot (x+d)^2$, amit a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel becsülve:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x}(d+x)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{x} \cdot \left(2\sqrt{dx}\right)^2 = 2d^2.$$

Ez azt jelenti, hogy $2d^2$ akkor lesz a legnagyobb, ha annyi, mint a háromszög területe, és ez akkor lép fel, ha $x = d$. Ebben az esetben $d^2 = \dfrac{1}{2}$, és $BC = x + d = \sqrt{2}$. Tehát a $\sqrt{2}$ alapú és $\sqrt{2}$ magasságú nem tompaszögű egységnyi területű háromszögekbe írható a legnagyobb négyzet.

Megjegyzés. A feladat megoldásában a beírt négyzet lefedett négyzet értelemben szerepelt. Szigorúbb értelemben beírt négyzet a *3. ábrán* látható négyzet.