

Ismeretes, hogy bármely pozitív szám és reciprokanak összege nagyobb vagy egyenlő, mint 2. Ezt írjuk fel az $a + \frac{1}{a}$, $b + \frac{1}{b}$, $ab + \frac{1}{ab}$ kifejezésekre, és adjuk össze az egyenlőtlenség megfelelő oldalait. Azt kapjuk, hogy

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + ab + \frac{1}{ab} \geq 6.$$

Adjunk mindkét oldalhoz 2-t, és rendezzük át a bal oldalt:

$$1 + ab + \frac{1}{ab} + 1 + a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a} = 1 + ab + \frac{1+ab}{ab} + \frac{1+ab}{b} + \frac{1+ab}{a} \geq 8.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát az $1 + ab > 0$ -val végigosztva:

$$1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{8}{1+ab},$$

éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. A feladat általánosítható az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számokra a következőképpen:

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{2^{n+1}}{1 + a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Az állítás a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával igazolható.

Pataki Péter (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., II. o.t.)