

Fel fogjuk használni az ismert (és könnyen ellenőrizhető)

$$(1) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

azonosságot, valamint hogy

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2 \geq 0$$

és

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z)^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ha behelyettesítjük (1)-be az $x = \sqrt[3]{4a}$, $y = \sqrt[3]{2b}$, $z = c$ számokat, a bal oldalon a $4a^3 + 2b^3 + c^3 - 6abc$ kifejezés fog állni. Először megmutatjuk, hogy ennek értéke 0-tól különböző egész szám. Az hogy egész, triviális, mert a, b, c egészek. Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy $4a^3 + 2b^3 + c^3 - 6abc$ lehet 0 úgy, hogy a, b, c nem mind 0. Tekintsünk az ilyen a, b, c , számhármakok közül egy olyat, amelyben $|a| + |b| + |c|$ minimális. A c páros, mert c^3 kivételével az összes tag biztosan páros. Ekkor viszont b is páros, mert $2b^3$ -től eltekintve mindegyik tag osztható 4-gyel. Végül a is páros, mert a $2b^3 + c^3 - 6abc$ kifejezés osztható 8-cal. Ha a, b, c mindegyike páros, akkor az

$$a_1 = \frac{a}{2}, \quad b_1 = \frac{b}{2}, \quad c_1 = \frac{c}{2} \quad \text{számokra}$$

$$4a_1^3 + 2b_1^3 + c_1^3 - 6a_1b_1c_1 = \frac{1}{8}(4a^3 + 2b^3 + c^3 - 6abc) = 0, \text{ viszont ez ellentmond annak, hogy } |a| + |b| + |c| \text{ mini-}$$

mális.

Az eddigiek alapján tehát

$$\begin{aligned} 1 &\leq |4a^3 + 2b^3 + c^3 - 6abc| = \\ &= \left| \sqrt[3]{4a} + \sqrt[3]{2b} + c \right| \cdot \left(2\sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4b^2} + c^2 - 2ab - \sqrt[3]{2}bc - \sqrt[3]{4}ca \right) \leq \\ &\leq \left| \sqrt[3]{4a} + \sqrt[3]{2b} + c \right| \cdot \frac{3}{2} \left(2\sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4b^2} + c^2 \right) < \left| \sqrt[3]{4a} + \sqrt[3]{2b} + c \right| \cdot (4a^2 + 3b^2 + 2c^2). \end{aligned}$$

Ebből az állítás egyszerű átrendezéssel adódik.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV.o.t.) dolgozata nyomán

Megjegyzés. A megoldásban azt az erősebb állítást láttuk be, hogy

$$\left| \sqrt[3]{4a} + \sqrt[3]{2b} + c \right| > \frac{1}{3\sqrt[3]{2a^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4b^2} + \frac{3}{2}c^2}.$$

A jobb oldal nevezőjében szereplő konstansok élesek. Defináljuk minden n pozitív egészre az (a_n, b_n, c_n) számhármast a következőképpen:

$$\sqrt[3]{4a_n} + \sqrt[3]{2b_n} + c_n = \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right)^n.$$

A fentiek alapján nem nehéz bebizonyítani, hogy

$$\left(\sqrt[3]{4a_n} + \sqrt[3]{2b_n} + c_n \right) \cdot \left(3\sqrt[3]{2a_n^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4b_n^2} + \frac{3}{2}c_n^2 \right) \rightarrow 1.$$