A következőket fogjuk bebizonyítani:

(1) Van olyan n, amelyre $f(n) \geq 2$.

(2) Tetszőleges n pozitív egészhez létezik olyan m pozitív egész, amelyre $f(m) \geq (f(n))^2$. Ezekből az állítás következik.

(1) bizonyításához elég egy példát mutatni, ilyen pl. $133 = 2^7 + 5 = 5^3 + 2^3$ vagy $129 = 5^3 + 2^2 = 5^2 + 5 \cdot 2^3 + 2^6$.

(2) bizonyításához legyen k olyan nagy pozitív egész, amelyre $2^k > n$, és legyen $m = 2^k n + 5^k n$. Azt állítjuk, hogy ez a szám megfelelő.

Legyen n két tetszőleges felbontása $n = a_1 + \dots + a_p$ és $n = b_1 + \dots + b_q$; k választása miatt ezekben a tagokban a 2 és az 5 kitevője kisebb k-nál.

A két felbontásból elkészíthetjük m egy felbontását úgy, hogy az egyik összeg tagjait 2^k-nal, a másikat 5^k-nal megszorozzuk: $m = 2^k a_1 + \dots + 2^k a_p + 5^k b_1 + \dots + 5^k b_q$. Megmutatjuk, hogy az ilyen módon kapható $(f(n))^2$ felbontás mind különböző, és teljesíti azt a feltételt, hogy egyik tag sem osztója a másiknak.

Mivel az a_i-k, illetve a b_i-k közül egyik sem osztója a másiknak, továbbá 2^k nem osztója $5^k b_i$-nek, és 5^k nem osztója $2^k a_i$-nek, m felbontásában egyik tag sem osztója a másiknak.

Az egyértelműség azért igaz, mert m felbontásában a $2^k a_i$ alakú tagok oszthatók 2^k-nal de 5^k-nal nem, illetve az $5^k b_i$ alakú tagok oszthatók 5^k-nal de 2^k-nal nem; emiatt m felbontása egyértelműen meghatározza, hogy n melyik két felbontásából készült.

Több dolgozat alapján