

I. megoldás. Minden k pozitív egészre konstruálunk olyan G_k háromszögmentes gráfot, amely nem színezhető ki k színnel.

Ha $k = 1$, akkor a két pontú, egy élű gráf megfelelő. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk G_{k-1} -et; most megkonstruáljuk G_k -t.

Legyen G_{k-1} pontjainak száma s , és legyen N pozitív egész (N pontos értékét később határozzuk meg), vegyünk fel egy N -elemű H ponthalmazt, valamint $\binom{N}{s}$ darab, G_{k-1} -gyel izomorf gráfot, legyenek ezek $G_{k-1}^1, \dots, G_{k-1}^{\binom{N}{s}}$.

Mindegyik G_{k-1}^i -nek feleltessük meg H egy s -elemű részhalmazát, és kössük össze G_{k-1}^i minden pontját a megfelelő részhalmaz egy-egy pontjával. Azt állítjuk, hogy az így kapott gráf háromszögmentes, és megfelelő N esetén nem színezhető ki k színnel.

Ha lenne háromszög, akkor annak legfeljebb egy csúcsa lehet H -ban, mert H -beli pontok között nincs él. Nem lehetnek csúcsai különböző G_{k-1}^i -kben sem, mert az ilyenek között sincs él. Nem lehet mindhárom pont ugyanabban a G_{k-1}^i -ben sem, mert G_{k-1}^i háromszögmentes. Már csak az az eset maradt, hogy egy csúcsa H -ban van, a másik kettő pedig ugyanabban a G_{k-1}^i -ben. Viszont H -beli pontból legfeljebb egy G_{k-1}^i -beli pontba megy él.

Tegyük fel, hogy a gráfot kiszíneztük $k - 1$ színnel. Ha N elég nagy, például $N > (s - 1)(k - 1)$, akkor H -ban van s darab egyszínű pont, legyen ezek színe piros. Az ezeknek megfelelő G_{k-1}^i -ben nem szerepelhet a piros szín, ez viszont ellentmond annak, hogy legalább $k - 1$ szín szükséges a színezéséhez.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. Egy másik konstrukciót mutatunk. Tegyük ismét fel, hogy G_{k-1} már létezik, pontjai legyenek $P_1, \dots, P_s$. Vegyük még fel a $Q_1, \dots, Q_s$ és R pontokat. Kössük össze P_i -t Q_j -vel, ha P_i és P_j össze van kötve, továbbá kössük össze R -et mindegyik Q_i -vel. Ha az így kapott gráfban lenne háromszög, annak legfeljebb egy csúcsa lehet a Q_i -k között, mert a Q_i -k között nem fut él; ebből kifolyólag R sem szerepel háromszögben. Ha pedig P_i, P_j és Q_l háromszöget alkot, akkor P_i, P_j és P_l is, ami ellentmond annak, hogy G_{k-1} háromszögmentes.

Tegyük fel, hogy a gráf kiszínezhető $k - 1$ színnel. Legyen R színe piros. Megadjuk a $P_1, \dots, P_s$ pontok egy jó színezését $k - 2$ színnel. Ez ellent fog mondani annak, hogy G_{k-1} színezéséhez legalább $k - 1$ szín kell.

Minden egyes piros P_i -t változtassuk Q_i színére. A Q_i pontok között nem szerepel a piros szín, mert közös szomszédjuk, R piros. A P_i -ket tehát csak legfeljebb $k - 2$ színnel színeztük. Ha P_i és P_j között fut él, akkor vagy mindkettő színét változatlanul hagytuk, és emiatt különbözőek maradtak, vagy az egyikük piros volt (mondjuk P_i), és annak színét Q_i színére változtattuk. Viszont Q_i és P_j között van él, Q_i és P_j színe különböző volt, tehát a módosított színezésben is P_i és P_j különböző színű.

Több dolgozat alapján