

Megmutatjuk, hogy megfelelő, csak 1-es és 2-es számjegyekből álló szám pontosan akkor létezik, ha  $d$  nem osztható 5-tel. Ha  $d$  osztható 5-tel, akkor  $d$  bármely többszöröse 0-ra vagy 5-re végződik, ezért nem állhat csupa 1-es és 2-es számjegyből.

Legyen  $d \cdot 2^{1996} = 2^n p$ , ahol  $p$  páratlan, 5-tel nem osztható egész. Az **F. 3084.** feladat megoldásában (KöMaL 1996/2. szám, 97. oldal) bebizonyítottuk, hogy tetszőleges  $n$  pozitív egészhez létezik olyan pontosan  $n$ -jegyű, csupa 1-es és 2-es számjegyből álló szám, amely osztható  $2^n$ -nel. Legyen ez a szám  $A$ .

Megmutatjuk, hogy létezik olyan  $k$  pozitív egész, amelyre  $1 + 10^n + 10^{2n} + \dots + 10^{kn}$  osztható  $p$ -vel. Tekintsük az  $1, 1 + 10^n, 1 + 10^n + 10^{2n}, \dots$  számokat. Ezek között vannak olyanok, amelyek  $p$ -vel osztva azonos maradékot adnak, legyen két ilyen szám

$$1 + 10^n + \dots + 10^{k_1 n} \quad \text{és} \quad 1 + 10^n + \dots + 10^{k_2 n},$$

ahol  $k_1 < k_2$ . Ekkor a két szám különbsége,

$$10^{(k_1+1)n} \left( 1 + 10^n + \dots + 10^{(k_2-k_1-1)n} \right)$$

osztható  $p$ -vel. Viszont  $p$  és  $10^{(k_1+1)n}$  relatív prímelek, ezért a második tényező osztható  $p$ -vel.

Tekintsük most az  $(1 + 10^n + 10^{2n} + \dots + 10^{kn}) \cdot A$  számot. Ez úgy keletkezik, hogy az  $A$  számot  $(k+1)$ -szer egymás után írjuk, tehát csupa 1-es és 2-es számjegyből áll; másrészt egy  $p$ -vel osztható és egy  $2^n$ -nel osztható szám szorzata, tehát osztható  $2^n p$ -vel.