Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 1$ esetben az állítás igaz, mert $a_1 = 1$ és $1 \leq a_2 \leq 2$.

Tegyük fel, hogy $n < m$ esetén igaz az állítás, és tegyük fel indirekt, hogy $n = m$ esetén nem, azaz léteznek olyan $a_1, \ldots, a_{2^m}$ pozitív egészek, amelyekre $a_k \leq k$, de közülük csak legfeljebb m hosszúságú monoton növő részsorozat választható ki.

Legyen $1 \leq x \leq 2^m$, és jelentse $h(x)$ azt, hogy az x szám hányszor szerepel az $a_1, \ldots, a_{2^m}$ számok között. Nyilván $h(1) \leq m$, mert ellenkező esetben lenne $m + 1$ darab 1-es a sorozatban.

Legyen most $2^l < x \leq 2^{l+1}$. Az $a_1, \ldots, a_{2^m}$ számok mind kisebbek x-nél, és közülük az indukciós feltevés szerint kiválasztható $l + 1$ hosszúságú, monoton növő részsorozat. Ezekhez hozzávéve $h(x)$ darab x-et, egy $l + 1 + h(x)$ hosszúságú monoton növő sorozatot kapunk; ezért az indirekt feltevés szerint $l + 1 + h(x) \leq m$, tehát $h(x) \leq m - l - 1$.

Ha összeszámoljuk, hogy az $a_1, \ldots, a_{2^l}$ sorozatban hány 1-es, 2-es stb. elem szerepel, akkor mindegyik a_k-t egyszer számoljuk, ezért a $h(x)$-ek összege éppen 2^m. Ez és az előbbi becslések alapján

$$2^m = \sum_{x=1}^{2^m} h(x) = h(1) + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{2^l < x \leq 2^{l+1}} h(x) \leq m + \sum_{l=0}^{m-1} (2^{l+1} - 2^l)(m - l - 1) =$$

$$= m - 2^0 \cdot (m-1) + 2^m \cdot 0 + \sum_{l=1}^{m-1} 2^l \cdot ((m-l) - (m-l-1)) = 1 + \sum_{l=1}^{m-1} 2^l = 2^m - 1,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzés. A feladat állítása éles; létezik olyan $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egész számokból álló sorozat, hogy $a_k \leq k$, és tetszőleges n pozitív egészre az $a_1, \ldots, a_{2^n - 1}$ számok közül nem választható ki $n + 1$ hosszúságú monoton növő részsorozat.

Legyen $a_n = 2^{l+1} - n$, ha $2^l \leq n < 2^{l+1}$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 3, \quad a_6 = 2, \quad a_7 = 1, \ldots$$

Ekkor az (a_1), $(a_2,\ a_3)$, $(a_4,\ a_5,\ a_6\ a_7)$, $\ldots$, $(a_{2^{n-1}},\ a_{2^{n-1}+1}, \ldots, a_{2^n - 1})$ részsorozatok szigorúan monoton fogynak, emiatt egy monoton növő részsorozat mindegyikből legfeljebb egy elemet, összesen legfeljebb n elemet tartalmazhat.

A megoldás kis módosításával igazolható, hogy ez az egyetlen ilyen példa.

Több dolgozat alapján