

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy tetszőleges, a lépések során keletkező $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ számhármásra $bc - ad = de - cf = be - af = 1$. Ennek következménye, hogy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, valamint hogy a lépések során keletkező törtek sohasem egyszerűsíthetők.

A számhármások rendezettsége megadja azt az algoritmust is, amellyel a kívánt középső elemet kell elérnünk. Ha az (α, β, γ) számhármásból kell tovább lépünk, akkor három eset lehetséges:

1. Ha $\alpha < q < \beta$, akkor a γ számot kell letörölnünk és az α, β számokkal kell tovább dolgoznunk, mert ebben az esetben az összes további medián az (α, β) intervallumban lesz;
2. Ha $\beta < q < \gamma$, akkor az α számot kell letörölnünk, és a β, γ számokkal kell folytatnunk a műveletet;
3. Ha $q = \beta$, akkor találtunk egy olyan számhármast, amelynek középső eleme q . Tovább folytatni nem szabad, mert az előbbi okok miatt semelyik újabb medián nem lehet q .

A fentiek alapján a q számot nem lehet két különböző módon előállítani. Azt kell még igazolnunk, hogy az eljárás biztosan előállítja q -t, azaz véges sok lépésben véget ér.

Legyen $q = \frac{s}{t}$, az n -edik lépésben keletkező számhármás $\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}, \frac{e_n}{f_n}\right)$. Megmutatjuk, hogy a $g_n = (sb_n - ta_n) + (te_n - sf_n)$ sorozat szigorúan monoton fogy. Ebből a végesség következik, mert a g_n sorozat pozitív egészekből áll.

Legyen az n -edik számhármás $\left(\frac{a_n}{b_n}, \frac{c_n}{d_n}, \frac{e_n}{f_n}\right)$, amelyben $c_n = a_n + e_n$ és $d_n = b_n + f_n$.

Ekkor $\frac{a_n}{b_n} < q < \frac{c_n}{d_n}$ esetén

$$g_{n+1} = (sb_n - ta_n) + (tc_n - sd_n) = te_n - sf_n < g_n,$$

a $\frac{c_n}{d_n} < q < \frac{e_n}{f_n}$ esetben pedig

$$g_{n+1} = (sd_n - tc_n) + (te_n - sf_n) = sb_n - ta_n < g_n.$$

Megjegyzések. 1. A megoldás kis módosításával az is igazolható, hogy ha nem a $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$, hanem tetszőleges $\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ számhármásból indulunk ki, akkor is tetszőleges $\frac{a}{b} < q < \frac{c}{d}$ racionális szám egyértelműen állítható elő.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., IV. o.)

2. Az, hogy az eljárás előállítja q -t, bebizonyítható a lépések egyszerű megfordításával is. Ha $q = \frac{s}{t}$ és ez a tört nem egyszerűsíthető, akkor egyértelműen léteznek olyan a, b, c, d nemnegatív egész számok, amelyekre $bs - at = et - fs = bc - ad = 1$, ezekkel a számokkal az utolsó számhármás csak $\left(\frac{a}{b}, \frac{s}{t}, \frac{c}{d}\right)$ lehet. Nem nehéz bebizonyítani, hogy egy ilyen számhármásból mindig lehet visszafelé lépni, kivéve a $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ számhármast. A visszafelé lépegetés közben a törtek nevezői csökkennek, ezért az eljárás csakugyan megadja q előállítását.

3. Ha nagyság szerint sorbarendezzük azokat a $[0, 1]$ -beli, nem egyszerűsíthető törteket, amelyek nevezője legfeljebb n , akkor az úgynevezett n -edik Farey-sorozatot kapjuk. Például az 5-ödik Farey-sorozat:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Ebben a sorozatban bármely két szomszédos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ elemre $bc - ad = 1$, továbbá, ha valamelyik tört nevezője nagyobb, mint a két szomszédjéé, akkor a tört a két szomszédjának a mediánja. (A Farey-sorozatokról bővebben lásd pl. Niven–Zuckermann: Bevezetés a számelméletbe, 6. fejezet)