

Ha $\lambda = 1$ vagy $\lambda = 4$, akkor létezik pozitív egész megoldás, például $x = y = z = v = 2$, illetve $x = y = z = v = 1$. Megmutatjuk, hogy más λ esetén nincs pozitív egész megoldás.

Tegyük fel, hogy egy bizonyos λ esetén létezik megoldás, és tekintsünk egy olyan megoldást, amelyre $x + y + z + v$ minimális. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $x \leq y \leq z \leq v$.

Először bebizonyítjuk, hogy

$$(2) \quad v \leq \frac{\lambda xyz}{2} \quad \text{és} \quad v \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tekintsük (1)-et úgy, mint egy v -ben másodfokú egyenletet. Ennek másik gyöke a gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viéta-formulák) alapján

$$(3) \quad v_1 = \lambda xyz - v = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{v}.$$

Az első képletből látható, hogy v_1 is egész, a második képletből pedig az látható, hogy pozitív. Ez azt jelenti, hogy (1)-nek az x, y, z, v_1 számnégyes is megoldása. Mivel azonban $x + y + z + v$ minimális, $v \leq v_1$, amiből (3) alapján (2) teljesül.

A λ értékére a következő becslés ad felső korlátot:

$$(4) \quad \lambda xyz = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \leq xv + yv + zv + v \frac{\lambda xyz}{2} \leq \left(3 + \frac{\lambda}{2}\right) xyzv;$$

ebből $\lambda \leq 3 + \lambda/2$, vagyis $\lambda \leq 6$.

Ha x, y, z, v között nincs páros, akkor a bal oldal osztható 4-gyel, viszont a jobb oldalon $xyzv$ páratlan, következésképpen λ osztható 4-gyel; ez csak $\lambda = 4$ esetén lehetséges.

Ha x, y, z, v között egy vagy három páros van, akkor a jobb oldal páros, a bal oldal páratlan, ami ellentmondás.

Ha x, y, z, v között két páros van, akkor a bal oldal 4-gyel osztva 2 maradékot ad, viszont a jobb oldal osztható 4-gyel, ami szintén ellentmondás.

Végül, ha x, y, z, v mind páros, akkor a (4) becslést kicsit élesebben leírva

$$\lambda xyzv \leq xv + yv + zv + v \frac{\lambda xyz}{2} \leq \left(\frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2}\right) xyzv; \quad \text{ebből } \lambda \leq \frac{3}{4} + \frac{\lambda}{2}, \text{ vagyis } \lambda = 1.$$

Pozitív egész megoldás tehát csak $\lambda = 1$ és $\lambda = 4$ esetén lehetséges.

Megjegyzések. 1. A (3) képlet alapján mindkét λ értékre végtelen sok megoldás konstruálható, hiszen x, y, z, v közül valamelyiket – például a legkisebbet – kicserélhetjük egy nagyobb egész számra.

2. Egy nagyon hasonló egyenlet ($x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$) vizsgálata megtalálható *Jaglom–Skljarszkij–Csencov: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből* c. könyvében (1. kötet, 118. feladat, *Tankönyvkiadó*, 1967), és a két feladat megoldása lényegében ugyanaz. Többen az ott leírt bizonyítást írták át az (1) egyenletre. Sajnos – a könyv nyomán – a v_1 számot a $v_1 = \lambda xyz - v$ képlettel definiálták, és behelyettesítéssel ellenőrizték, hogy az x, y, z, v_1 számnégyes is megoldása (1)-nek. Viszont – a könyvhöz hasonlóan – elfelejtették megindokolni, hogy v_1 miért pozitív. (Ezek a versenyzők 4 pontot kaptak.) Ketten még a másolás gyanújába is keveredtek, mert a legkritikusabb mondatokat szó szerint másolták ki a könyvből.