

Jelöljük $\sigma(x)$ -szel x osztóinak összegét. Ismeretes, hogy ha p és q relatív prímek, akkor $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$.

Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy egy $2^k(m+1)$ alakú szám majdnem tökéletes ($k \geq 1, m \geq 0$). Ekkor $\sigma(2^k \cdot (2m+1)) = 2^{k+1}(2m+1)+1$. Másrészt $(2^k, (2m+1)) = 1$ miatt $\sigma(2^k \cdot (2m+1)) = \sigma(2^k)\sigma(2m+1) = (2^{k+1}-1)\sigma(2m+1)$, így $(2^{k+1}-1)\sigma(2m+1) = 2^{k+1}(2m+1)+1$.

$\sigma(2m+1)$ páratlan, mivel a fenti egyenlet jobb oldala páratlan. Ha egy páratlan számnak osztója l , akkor l és az osztópárja azonos paritású, így az osztópár összege páros. Ha a páratlan szám nem négyzetszám, akkor l osztópárja sohasem önmaga, így a szám osztóinak összege páros. De $\sigma(2m+1)$ páratlan, ezért $2m+1 = b^2$ valamely b egészre. Ekkor

$$(2^{k+1}-1)\sigma(b^2) = 2^{k+1}b^2 + 1, \quad (2^{k+1}-1)(\sigma(b^2) - b^2) = b^2 + 1,$$

ahonnan $b^2 \equiv -1 \pmod{2^{k+1}-1}$.

$2^{k+1}-1 \equiv 3 \pmod{4}$, mert $k \geq 1$, ezért $(2^{k+1}-1)$ -nek nem lehet minden osztója $4s+1$ alakú. Legyen p a $(2^{k+1}-1)$ -nek egy $4s+3$ alakú prímosztója, ekkor $b^2 \equiv -1 \pmod{p}$,

$$b^{p-1} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2s+1} = -1 \pmod{p},$$

tehát $b^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$, ami viszont ellentmond a kis-Fermat tételnek. Ezzel az állítást igazoltuk.

Lippner Gábor (Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o.t.)