Megmutatjuk, hogy pontosan a következő gráfok vaktában bejárhatóak: a teljes gráfok, a körök és az ún. *teljes páros gráfok* közül azok, amelyeknél a csúcsok halmaza két azonos elemszámú részre osztható úgy, hogy két csúcs pontosan akkor van éllel összekötve, ha különböző részbe tartozik. Egyszerűen látható, hogy a felsorolt gráfok valóban vaktában bejárhatóak.

Tegyük fel ezután, hogy $\mathcal{G}$ vaktában bejárható gráf, amelynek $n \geq 4$ csúcsa van. Jelölje $A_1A_2\dots A_n$ a gráf tetszőleges (az A_1 csúcsból induló) Hamilton-útját. Ha a gráf bejárását az A_2 csúcsból kezdjük és az $A_2A_3\dots A_{n-1}$ úton eljutunk A_{n-1}-be, akkor a vaktában bejárhatóság miatt el kell jutnunk A_1-be is, ami azt jelenti, hogy A_n és A_1 is össze van éllel kötve, azaz létezik az $A_1A_2\dots A_nA_1$ (Hamilton-)kör.

Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{G}$ tartalmaz háromszöget, akkor teljes. Jelöljön ABC egy háromszöget, akkor a gráf bejárható egy $ABCP_4P_5\dots P_n$ út mentén, és az előbbiek szerint itt P_n és A között is megy él. Ha valamelyik P_i csúcs nincs összekötve pl. B-vel, akkor induljunk el P_{i+1}-ből a $P_{i+1}P_{i+2}\dots P_nACP_4P_5\dots P_i$ út mentén. Itt megakadunk, nem tudunk B-be jutni, és ez ellentmondás. Tehát egy háromszög csúcsai a gráf minden csúcsával össze vannak kötve. Legyen X egy tetszőleges csúcsa $\mathcal{G}$-nek; az előbbiek szerint ekkor AXC is háromszög, ezért X minden csúccsal össze van kötve, azaz $\mathcal{G}$ teljes.

A következőkben feltehetjük, hogy a gráfban nincs háromszög. Ha a – továbbiakban rögzített – $A_1A_2\dots A_nA_1$ körön kívül nincsenek további élek $\mathcal{G}$-ben, akkor nincs mit bizonyítanunk; tegyük fel ezért, hogy létezik e kör éleitől különböző él is. Definiáljuk (e kör szerint) az A_i és A_j pontok ***távolságát*** a $d(A_i,A_j) := \min(|i-j|,\ n-|i-j|)$ képlettel; egy él ***hosszán*** pedig értsük a végpontjainak a távolságát. Tekintsünk egy, az $A_1A_2\dots A_nA_1$ körhöz nem tartozó olyan élt, amelynek a hossza minimális; feltehető, hogy ez A_nA_k alakú, alkalmas $3 \leq k \leq \frac{n}{2}$-re. Ekkor az $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ pontok között nem vezet a körön kívüli él, hiszen annak hossza az A_nA_k hosszánál kisebb lenne. Mivel a gráf háromszögmentes, A_{k+1} nincs összekötve A_{k-1}-gyel. Tegyük fel, hogy A_{k+1} nincs összekötve A_1-gyel sem; ekkor azonban A_{k+1} nem lehet összekötve az A_1, A_2, …, A_{k-1} pontok egyikével sem, hiszen egy ilyen él hossza kisebb lenne, mint A_nA_k-é. Induljunk el A_{k+2}-ből az $A_{k+2}A_{k+3}\dots A_nA_kA_{k+1}$ út mentén. Iménti következtetésünk szerint innen az A_1, A_2, …, A_{k-1} csúcsok egyikére sem tudunk továbblépni, ami ellentmondás. Tehát A_{k+1} össze van kötve A_1-gyel. Ezzel beláttuk, hogy minimális hosszúságú él „egy egységgel való elforgatottja" is (minimális hosszúságú) él, azaz

$(*)$ *valamennyi* A_jA_{j+k} *is él, minden* j*-re.*

Hasonlóan tételezzük fel, hogy A_{k+2} nincs összekötve sem A_1-gyel sem pedig A_{k-1}-gyel; $(*)$ szerint ekkor szükségképpen $k > 3$. Így A_{k+2} az A_1, A_2, …, A_{k-1} közül legfeljebb csak az A_2-vel lehet összekötve. Akkor viszont az $A_{k+3}A_{k+4}\dots A_nA_kA_{k+1}A_{k+2}$ utat vagy egyáltalán nem, vagy csupán az A_2-ig tudjuk folytatni, ott viszont vagy A_1 felé továbbhaladva az A_{k-1}, vagy A_{k-1} felé továbbhaladva az A_1 pontot kényszerülünk kihagyni; tehát A_{k+2} össze van kötve A_1-gyel vagy A_{k-1}-gyel. Az A_1-gyel azonban nem lehet összekötve, hiszen akkor $A_{k+2}A_1A_{k+1}$ háromszög lenne; így A_{k+2} az A_{k-1}-gyel van összekötve. Ebből következik, hogy a körön kívüli élek hosszának minimuma $k=3$.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{G}$ mindegyik csúcsa össze van kötve A_3 és A_4 valamelyikével. Ha ugyanis egy A_i ezek egyikével sincs összekötve, akkor az $A_{i+1}A_{i+2}\dots A_nA_1A_2A_5A_6\dots A_i$ utat nem tudjuk befejezni.

A háromszögmentesség miatt A_6 (az A_3 és A_4 közül) csak A_3-mal lehet összekötve, ezért A_7 az A_4-gyel, A_8 az A_3-mal, … , A_{2t-1} az A_4-gyel, A_{2t} az A_3-mal, stb. Ugyanezt azonban $(*)$ szerint elmondhatjuk A_nA_3 helyett bármelyik minimális hosszúságú A_jA_{j+3} élből kiindulva, és akkor A_3 és A_4 helyett általában az A_{j+3} és A_{j+4} csúcsokról mondható el, hogy minden csúcs ezek valamelyikével össze van kötve, éspedig A_{j+2t-1} az A_{j+4}-gyel, A_{j+2t} pedig az A_{j+3}-mal. Mivel itt j és t értéke tetszőleges, ez éppen azt jelenti, hogy n páros, és $\mathcal{G}$-ben két csúcs között pontosan akkor megy él, ha indexeik különböző paritásúak.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. III. o.t.)