

Jelöljük az i -edik Fibonacci-számot f_i -vel, azaz $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ stb. Ismeretes (és az n -re vonatkozó teljes indukcióval könnyen igazolható), hogy $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(b_1^n - b_2^n)$, ahol $b_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $b_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Ugyanígy az $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ rekurzióval értelmezett sorozat elemeire $L_n = b_1^n + b_2^n$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $L := L_{2k}$ ($k = 0, 1, \dots$) esetén fennáll $a_n = \frac{f_{2kn}}{f_{2k(n+1)}}$. Teljes indukciót alkalmazunk n -re: $n = 0$ -ra az összefüggés nyilvánvalóan teljesül; tegyük fel, hogy $a_n = \frac{f_{2kn}}{f_{2k(n+1)}}$. Ekkor, felhasználva, hogy $b_1 b_2 = -1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} f_{2k(n+2)} &= \frac{1}{L_{2k} - a_n} f_{2k(n+2)} = \frac{f_{2k(n+2)}}{L_{2k} - \frac{f_{2kn}}{f_{2k(n+1)}}} = \frac{f_{2k(n+2)} f_{2k(n+1)}}{L_{2k} f_{2k(n+1)} - f_{2kn}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(b_1^{2k(n+2)} - b_2^{2k(n+2)}) (b_1^{2k(n+1)} - b_2^{2k(n+1)})}{(b_1^{2k} + b_2^{2k}) (b_1^{2k(n+1)} - b_2^{2k(n+1)}) - (b_1^{2kn} - b_2^{2kn})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{b_1^{2k(2n+3)} + b_2^{2k(2n+3)} - (b_1^{2k} + b_2^{2k})}{b_1^{2k(n+2)} - b_2^{2k(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} (b_1^{2k(n+1)} - b_2^{2k(n+1)}) = f_{2k(n+1)}, \end{aligned}$$

azaz $a_{n+1} = \frac{f_{2k(n+1)}}{f_{2k(n+2)}}$.

Mivel az $L_1, L_2, L_3, \dots$ sorozat szigorúan monoton nő, a feladat állítását igazoltuk.

Több megoldás alapján