

Az, hogy egy egész együtthatós q polinomra teljesül az $n \mid q(m+n) - q(m)$ reláció, következik a

$$q(m+n) - q(m) = \sum_{i=0}^k a_i((m+n)^i - m^i) = n \cdot \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} m^j n^{i-j-1}$$

azonosságból. Legyen ezután (minden t egészre)

$$p(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (t+j)(t+j-1) \dots (t-j).$$

A p függvényt definiáló összeg (minden t egészre) csak véges sok nemnulla tagot tartalmaz, sőt, a

$$p_k(t) := \sum_{j=0}^k (t+j)(t+j-1) \dots (t-j)$$

jelölést bevezetve látható, hogy $p(t) = p_k(t)$, ha $k > |t|$. Így minden m, n egészhez található olyan k természetes szám, amelyre $p(m+n) - p(m) = p_k(m+n) - p_k(m)$, és ez utóbbi n -nel osztható, hiszen p_k egész együtthatós polinom. A p függvény nem polinomfüggvény, mivel minden n természetes számra

$$p(n) \geq (n + (n-1))(n + (n-2)) \dots (n - (n-1)) = (2n-1)! > n^n,$$

ezért a $p(x)/x^n$ függvény végtelenben vett határértéke semmilyen n -re sem lehet nulla.

Megjegyzések. 1. A feladat kívánalmait kielégíti a $p(x) = \frac{1}{2}(x^4 - x^2)$ függvény is, amely polinom, de nem egész együtthatós.

2. Belátható, hogy a feladat követelményeit kielégítő függvények halmaza kontinuum számosságú, akárcsak az összes $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ függvények halmaza. (Ezzel szemben az egész együtthatós polinomfüggvények halmaza csupán megszámlálhatóan végtelen számosságú.)

Frenkel Péter, (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. III. o.t.) *Pap Gyula*, (Debrecen, Fazekas M. Gimn. III. o.t.)