

**I. megoldás.** Jelöljük a háromszög oldalait és csúcsait a szokásos módon  $a, b, c$ ;  $A, B, C$ -vel úgy, hogy  $c > b \geq a$  teljesüljön. A  $C$  csúcsból induló magasság, szögfelező és súlyvonal legyen  $m, f$  és  $s$ , ezek talppontjai pedig  $T, L$  és  $F$  (lásd az ábrát).

Nyilvánvaló, hogy  $f \geq m$ . A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{b}{a} = \frac{AL}{BL}, \text{ azaz } b \geq a \text{ miatt } AL \geq BL.$$

Ugyanakkor a  $b \geq a$  egyenlőtlenségből következik, hogy  $\angle ABC \leq \angle BAC$ , vagyis  $\angle ABC \geq \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ , tehát  $\angle BCT = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Ezek alapján  $L$ -nek  $T$  és  $F$  között kell elhelyezkednie. Mivel  $\angle FLC = \angle LTC + \angle TCL = 90^\circ + \angle TCL$ , ezért az  $FLC$  – esetleg elfajuló – háromszögben  $FC$  a legnagyobb oldal, azaz  $s \geq f$ . Viszont Thalész tétele miatt  $s = \frac{c}{2}$ , tehát

$$f + m \leq s + s = c.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $s = f = m$ , azaz ha a háromszög egyenlő szárú (és természetesen derékszögű).

*Hesz Gábor* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II.o.t.) és *Savanya Márta* (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn., II.o.t.) dolgozatai alapján

**II. megoldás.** Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Az  $ABC$  háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy  $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{m \cdot c}{2}$ , amiből

$$(1) \quad m = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Az  $ABC$  háromszög területét felírhatjuk úgy is, mint az  $ALC$  és a  $BLC$  háromszögek területeinek összegét:

$$(2) \quad \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2} + \frac{b \cdot f \cdot \sin 45^\circ}{2},$$

$$\text{amiből } f = \frac{\sqrt{2} \cdot ab}{a + b}.$$

Az  $a$  és  $b$  pozitív számok harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepei közti ismert egyenlőtlenségek szerint

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket és a Pitagorasz tételéből következő  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  összefüggést (1)-be és (2)-be beírva kapjuk, hogy

$$(3) \quad m = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \leq \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{2}} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}},$$

és

$$(4) \quad f = \frac{\sqrt{2}a \cdot b}{a+b} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}.$$

(3) és (4) megfelelő oldalait összeadva:

$$m + f \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = c,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $a = b$ .

