

a) Az $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ azonosság alapján

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1995 - 1996} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1995} - \frac{1}{1996}\right) = 1 - \frac{1}{1996},$$

így az összeghez hozzávéve az $\frac{1}{1996}$ -ot, 1-et kapunk, és ezzel előállítottuk az 1-et 1996 különböző pozitív egész reciprokainak összegeként.

b) Mivel $a_1, a_2, \dots, a_{1996}$ különböző pozitív egészek, azért

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1996}} &\leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1996} < \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{512} + \frac{1}{513} + \dots + \frac{1}{1023}\right) + \left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1025} + \dots + \frac{1}{2047}\right) < \\ &< \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{512} + \frac{1}{512} + \dots + \frac{1}{512}\right)}_{512\text{-szer}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} + \dots + \frac{1}{1024}\right)}_{1024\text{-szer}} = 11. \end{aligned}$$

Tehát a 11-et nem lehet előállítani 1996 különböző pozitív egész reciprokainak összegeként.

Izsák Rudolf (Szombathely, Premontrei Rendi Szt. Norbert Gimn., II. o.t.)

dolgozata alapján