

Tekintsük a feladatot megoldottnak. A két kör közös pontjának nyilván rajta kell lennie az AD szakaszon. Jelöljük ezt a pontot E -vel (1. ábra).

Ismert, hogy egy háromszög egyik csúcsából a beírt körhöz húzott érintő hossza megegyezik a háromszög félkerületének és a csúccsal szemközti oldal hosszának különbségével. (A 2. ábra jelöléseit használva $a = x + y$, $b = y + z$ és $c = z + x$; ezekből pedig azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{2}(a + b + c) - b$, $y = \frac{1}{2}(a + b + c) - c$ és $x = \frac{1}{2}(a + b + c) - a$.) Ezért ha s_B , illetve s_C jelöli az ABD , illetve az ACD háromszög félkerületét, akkor $DE = s_B - AB$ és $DE = s_C - AC$, azaz $s_B - s_C = AB - AC$.

Viszont

$$s_B - s_C = \frac{1}{2}(AB + BD + DA) - \frac{1}{2}(AC + CD + DA) = \frac{1}{2}(AB - AC) + \frac{1}{2}(BD - CD),$$

ezért $BD - CD = AB - AC$. Másrészt $BD + CD = BC$, tehát végül azt kapjuk, hogy

$$BD = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) \quad \text{és} \quad CD = \frac{1}{2}(AC + BC - AB).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy D az ABC háromszögbe írt kör BC -n lévő érintési pontja. Ezek alapján a szerkesztés nyilvánvaló, a feladatnak mindig pontosan egy megoldása van.

Gyenes Zoltán (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gimn., I. o.t.)

