

Az 1996 pont véges sok tetraédert határoz meg. Legyen $ABCD$ ezek közül egy olyan tetraéder, amelynek a térfogatánál nincs nagyobb térfogatú a pontok által meghatározott tetraéderek között. Legyen S_A az az A -n átmenő sík, amelyik párhuzamos a BCD háromszög síkjával. Ekkor az 1996 pont mindegyike az S_A síknak ugyanazon az oldalán kell legyen, mint ahol B, C és D is van (S_A is tartalmazhat A -n kívül további pontokat), ugyanis egy E pont a sík másik oldalán lenne, akkor az $EBCD$ tetraéder térfogata az $ABCD$ tetraéder térfogatánál nagyobb lenne (1. ábra), hiszen E messzebb lenne a BCD síktól, mint A . Ugyanígy láthatjuk be, hogy a B, C és D pontokon átmenő, a velük szemközti lapokkal párhuzamos S_B, S_C és S_D síkoknak is megvan az a tulajdonságuk, hogy az 1996 pont mindegyike ugyanazon az oldalukon van, ahol az $ABCD$ tetraéder. Ezért az S_A, S_B, S_C és S_D síkok által meghatározott $A'B'C'D'$ tetraéder az 1996 pont mindegyikét a belsejében, vagy a lapjain tartalmazza.

Jelöljük az $ABCD$ tetraéder súlypontját S -sel. Ismert, hogy az S súlypont $1 : 3$ arányban osztja a tetraéder súlyvonalait (2. ábra). Ezért az S középpontú, -3 arányú középpontos hasonlóság az $ABCD$ tetraédert az $A'B'C'D'$ tetraéderbe viszi. Tehát az $A'B'C'D'$ tetraéder térfogata $3^3 = 27$ -szerese az $ABCD$ tetraéder térfogatának. Mivel ez utóbbi térfogat kisebb, mint $0,037$, ezért az $A'B'C'D'$ tetraéder V térfogatára igaz, hogy

$$V < 0,037 \cdot 27 = 0,999.$$

Nagyítsuk az $A'B'C'D'$ tetraédert S -ből $(1/\sqrt[3]{V})$ -szeresére. Mivel $V < 1$, azért $(1/\sqrt[3]{V}) > 1$, tehát a nagyítás után kapott $A''B''C''D''$ tetraéder az 1996 pont mindegyikét a belsejében tartalmazza. E tetraéder térfogata a nagyítás miatt $V \cdot (1/\sqrt[3]{V})^3 = 1$, tehát feladatunk minden követelményének megfelel.

Szabó Gábor (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

