

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget az 1 , x^2y^4 és x^4y^2 számokra:

$$\frac{1 + x^2y^4 + x^4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} = x^2y^2,$$

ami átrendezve éppen azt jelenti, hogy

$$4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 \geq 3.$$

Azt kell még belátni, hogy teljesülhet-e egyenlőség, és ha igen, milyen x és y esetén. A felhasznált egyenlőtlenségben akkor áll egyenlőség, ha $1 = x^2y^4 = x^4y^2$. Ebből $x \neq 0$, $y \neq 0$, majd $x^2 = y^2$, és emiatt $x^2 = y^2 = 1$ következik, azaz $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Ekkor viszont azonnal látszik, hogy valóban teljesül is az egyenlőség. Ezzel igazoltuk, hogy a kifejezés legkisebb lehetséges értéke 3, amit az $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ esetekben vesz föl.

Szabados Péter (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Egy másik, sok beküldőnél látott gondolatmenet a következő. Keressük inkább az $x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$ minimumát. Mivel pl. $x = y = 1$ -re a kifejezés negatív, azért a minimum is az, így elég a

$$3x^2y^2 - x^4y^2 - x^4y^2 = x^2y^2(3 - x^2 - y^2)$$

maximumát keresni, méghozzá csak az olyan (x, y) párok között, amelyekre $3 - x^2 - y^2 > 0$. Ha itt alkalmazzuk az $x^2, y^2, 3 - x^2 - y^2$ hármásra a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, ugyancsak célhoz érünk.