

Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder lapjai nem egyenlő területűek, akkor a két legkisebb területű lappal szemköztí csúcsoknál lévő kis tetraédereknek van közös belső pontjuk.

Tegyük fel, hogy az $ABCD$ tetraéder BCD és ACD lapjai a legkisebb területűek. Az A és a B csúcsokhoz tartozó kis tetraéderek további csúcsait jelölje az *ábra* szerint P, Q, R , illetve L, M és N . Megmutatjuk, hogy $AP + LB > AB$, amiből állításunk nyilván következik.

A PQR és a BCD síkok párhuzamosak, ezért az $ABCD$ és az $APQR$ tetraéderek hasonlóak. Ha e két tetraéder A -hoz tartozó magasságát M_A , illetve m_A jelöli, akkor a hasonlóság miatt

$$(1) \quad \frac{AP}{AB} = \frac{m_A}{M_A}.$$

Jelöljük a nagy tetraéder térfogatát V -vel, beírt gömbjének sugarát ϱ -val, az egyes lapok területét pedig t_A, t_B, t_C és t_D -vel. Ismert, hogy

$$3V = M_A \cdot t_A = \varrho(t_A + t_B + t_C + t_D).$$

Mivel PQR érinti a beírt gömböt, ezért $M_A = m_A + 2\varrho$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva alakítsuk át (1)-et:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{M_A - 2\varrho}{M_A} = \frac{3V/t_A - 2\varrho}{3V/t_A} = \frac{3V - 2\varrho \cdot t_A}{3V} = \frac{\varrho(t_A + t_B + t_C + t_D) - 2\varrho \cdot t_A}{\varrho(t_A + t_B + t_C + t_D)} = \frac{t_B + t_C + t_D - t_A}{t_A + t_B + t_C + t_D}.$$

A $BACD$ és a $BLMN$ hasonló tetraéderekből kiindulva ugyanezzel az eljárással azt kapjuk, hogy

$$\frac{BL}{AB} = \frac{t_A + t_C + t_D - t_B}{t_A + t_B + t_C + t_D}. \quad \text{Vagyis} \quad \frac{AP + LB}{AB} = \frac{2t_C + 2t_D}{t_A + t_B + t_C + t_D} > 1,$$

mert feltételeink szerint $t_C + t_D > t_A + t_B$. Így a két tetraédernek van közös belső pontja.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

