

Először megmutatjuk, hogy bármely kijelölt R részhalmaznak pontosan m eleme van. Mivel R valódi részhalmaz, azért létezik egy benne nem lévő p elem. Minden $q \in R$ elemnek megfelelően az (a) szerint egyértelműen létező, p -t és q -t tartalmazó S kijelölt részhalmazt, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk R elemei és a p -t tartalmazó, R -t metsző kijelölt részhalmazok közt. Tehát minden kijelölt részhalmaz m elemet tartalmaz.

A (b) feltételből következik, hogy minden p elemet pontosan $m + n$ kijelölt részhalmaz tartalmaz. Rögzítsük most H -nak egy r elemét. Az r -től különböző elemek mindegyike – (a) miatt – pontosan egy r -t tartalmazó részhalmazhoz tartozik hozzá. Az r -t $m + n$ részhalmaz tartalmazza, és ezek mindegyikében $m - 1$ darab r -től különböző elem van; ezért H -nak összesen $h = 1 + (m + n)(m - 1)$ eleme van.

A kijelölt részhalmazok száma legyen k . Számoljuk össze azon (p, R) párokat, ahol p a H -nak egy eleme, R egy kijelölt részhalmaz, és $p \in R$. Mivel h elemünk van, és mindegyik $m + n$ részhalmazban van benne, azért az ilyen párok száma $h(m + n)$. A számolást viszont úgy is elvégezhetjük, hogy a k darab kijelölt részhalmaz mindegyike m elemet tartalmaz, ezért a párok száma $k \cdot m$. A kétféle számolás eredményének meg kell egyeznie, ezért $k \cdot m = h(m + n)$, ahonnan kapjuk, hogy

$$k = \frac{h(m + n)}{m} = \frac{[1 + (m + n)(m - 1)](m + n)}{m}.$$

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladathoz nem tartozott hozzá annak vizsgálata, hogy léteznek-e a feltételeknek eleget tevő H halmazok. A megoldásból látszik – hiszen k -nak egész számnak kell lennie –, hogy nem minden $(m; n)$ párhoz van H . A létezés szükséges feltétele, hogy $m \mid n(n - 1)$; általában azonban a létezés kérdése megoldatlan probléma. Az ábrákon két egyszerű példát mutatunk. H elemeit pontokkal ($P_1, P_2, \dots$) jelöljük, a kitüntetett részhalmazok kételeműek, ezeket úgy adjuk meg, hogy a részhalmazt alkotó két pontot egy egyenessel összekötjük. Az $m = n = 3$ esetén is létezik H (13 elemet tartalmaz, és 26 részhalmazt kell kijelölnünk), ennek megadása azonban már nem ilyen egyszerű.

