

Az $(a - b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$. Szorozzuk meg ezt $\frac{a^2 + b^2}{2}$ -vel (ez nemnegatív, így a reláció nem fordul meg):

$$(1) \quad \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot ab = \frac{a^3b + b^3a}{2}.$$

Elegendő tehát azt igazolnunk, hogy

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{4}.$$

Átalakítva

$$\frac{4a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 3a^4 - 6a^2b^2 - 3b^4}{12} \geq 0, \frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}{12} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{12} \geq 0. (2)$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden a, b esetén fennáll, ezért a bizonyítandó állítás is igaz. Vizsgáljuk még meg az egyenlőség feltételeit. Ehhez az kell, hogy (1)-ben és (2)-ben is egyenlőség álljon, azaz $a = b$ vagy $a^2 + b^2 = 0$, valamint $a^2 = b^2$ teljesüljön. Ez csak akkor lehetséges, ha $a = b$, viszont akkor az egyenlőség valóban fenn is áll.

Szilágyi Judit (Balatonfüred, Lóczy L. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján