

I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy ha $a < \frac{b+c}{2}$, akkor $s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$. A feltételt négyzetre emelve és a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$(1) \quad a^2 < \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 \leq \frac{b^2+c^2}{2}.$$

Ezután bebizonyítjuk, hogy

$$(2) \quad s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$$

ekvivalens (1)-gyel. Ismeretes, hogy pl. az s_a súlyvonal: $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye 1673.a feladat). Ezt felhasználva (2) így alakul:

$$2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} > \sqrt{2a^2+2c^2-b^2} + \sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Négyzetre emelve és rendezve

$$7b^2+7c^2-8a^2 > 2\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}.$$

A jobb oldalt a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint nála nem kisebb értékkel behelyettesítve, elegendő belátni, hogy $7b^2+7c^2-8a^2 > 4a^2+c^2+b^2$. Ez egyben azt jelenti, hogy $\frac{b^2+c^2}{2} > a^2$, és ez az (1) összefüggés. Mivel átalakításaink megfordíthatók, (1)-ből következik (2), tehát a feladat állítását igazoltuk.

Az állítás megfordítása hamis, amint ezt az $a=4$, $b=3$, $c=5$ példa is mutatja.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. Ha $a < \frac{b+c}{2}$, akkor a nem lehet a legnagyobb oldal. Feltehetjük, hogy a legnagyobb oldal c , és ezután két esetet kell megnéznünk:

1. $a \leq b \leq c$ és egyenlőség csak az egyik helyen állhat. Az $s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$ összefüggésből következik, hogy s_a a legnagyobb súlyvonal, tehát most $s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$.

2. Legyen most $b < a \leq c$. A feltétel szerint $a-b < c-a$, tehát a és c nem lehet egyenlő. A feltételi egyenlőtlenségből

$$(3) \quad a^2 - b^2 < c^2 - a^2$$

következik, hiszen a nagyobb oldalt nagyobb számmal szoroztuk. Az s_a , s_b , s_c -re szóló összefüggések szerint:

$$s_b^2 - s_a^2 = \frac{3}{4}(a^2 - b^2) \quad \text{és} \quad s_a^2 - s_c^2 = \frac{3}{4}(c^2 - a^2),$$

ezért (3)-ból

$$s_b^2 - s_a^2 < s_a^2 - s_c^2,$$

azaz

$$(s_b - s_a)(s_b + s_a) < (s_a - s_c)(s_a + s_c),$$

amiből $s_b - s_a < s_a - s_c$, hiszen $s_b + s_a > s_a + s_c$. Tehát $s_a > \frac{s_b+s_c}{2}$, amint ezt bizonyítani kellett.