I. megoldás. Jelöljük az ABC lap területét t-vel. Vetítsük rá az ABC háromszöget a másik három lapra. Ha pl. az ABC lap az ABD-vel γ szöget zár be (*1. ábra*), akkor $t \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} DA \cdot DB$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC$ és $t \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DA$. A három összefüggés szorzatából:

$$t^3 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \frac{1}{8}(DA \cdot DB \cdot DC)^2. \tag{1}$$

Vetítsük most a D csúcsot tartalmazó lapokat az ABC-re. A vetületek területének összege nyilván t, ezért

$$t = \frac{1}{2} DA \cdot DB \cos\gamma + \frac{1}{2} DB \cdot DC \cos\alpha + \frac{1}{2} DC \cdot DA \cos\beta.$$

A számtani és mértani közép közötti összefüggés szerint, felhasználva, hogy α, β, γ mindegyike hegyesszög,

$$\frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{8}(DA \cdot DB \cdot DC)^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma},$$

majd (1) alapján

$$\frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{t^3 \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma},$$

amiből $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$, tehát ha az ABC háromszög szabályos.

Páles Csaba (Debrecen , KLTE Gyak. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Legyen a tetraéder D csúcsa egy derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja, az A, B, C csúcsok pedig illeszkedjenek az x, y, z tengelyekre (*2. ábra*).

Legyen továbbá a tetraéder D csúcsából induló magasság talppontja T, a DT-re illeszkedő egységvektor $\mathbf{s}$. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Ha az ABD és ABC lap hajlásszöge γ, akkor a CDT szög is γ, hiszen CD az ABD sík, DT pedig az ABC sík normálisa. Hasonlóan kapjuk, hogy $ADT\sphericalangle = \alpha$ és $BDT\sphericalangle = \beta$. Könnyen látható, hogy $\cos\alpha = \mathbf{i}\cdot\mathbf{s}$, $\cos\beta = \mathbf{j}\cdot\mathbf{s}$ és $\cos\gamma = \mathbf{k}\cdot\mathbf{s}$, és így

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{s} == 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\varphi \le \sqrt{3}, (2)$$

ahol φ az $\mathbf{s}$ és az $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektorok szöge. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség és (2) szerint:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \le \left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}, \tag{3}$$

ahol felhasználtuk, hogy α, β, γ mindegyike hegyesszög. Egyenlőség (2)-ben és (3)-ban is akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha=\beta=\gamma$, azaz $DA=DB=DC$, amikoris az ABC háromszög szabályos.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)

III. megoldás. A *2. ábra* $\mathbf{s}$ egységvektorának koordinátái $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ezért $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. A mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma} \le \sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

amiből már következik a feladat állítása.