I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy adott r sugarú kör köré írható két egyenlő szárú, nem egybevágó, egyenlő területű háromszög. Az *1. ábrán* az egyik ilyen háromszöget rajzoltuk meg, amelynek alapja $2b$, szára pedig a. Nyilván megválasztható a és b úgy, hogy $a:b=3:1$ legyen, hiszen egy ilyen háromszögbe írható kör, és a kapott ábrát megfelelően nagyítva a beírt kör sugara r lesz. Ezután az egységet úgy választjuk meg, hogy $b=1$ legyen. Ismeretes, hogy a háromszög területe $t=r\cdot s$, ahol s a félkerület. Ezért, ha két háromszög területe és beírt köre egyenlő, akkor a kerületük is egyenlő. Ennek alapján a másik háromszöget úgy próbáljuk meghatározni, hogy alapjának fele, illetve szára $b'=1+x$, illetve $a'=3-x$ legyen, tehát a kerületek egyenlők, és a területük is egyezzen meg. Az ABC háromszög alaphoz tartozó magassága $\sqrt{9-1}=\sqrt{8}$, a másik háromszögé $\sqrt{(3-x)^2-(1+x)^2}=\sqrt{8-8x}$, a területek egyenlőségének a feltétele:

$$1\cdot\sqrt{8}=(1+x)\sqrt{8-8x},\qquad \text{amiből}\qquad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{1}$$

Ezért a második háromszög oldalai $2b'=2(1+x)=\sqrt{5}+1$, $a'=3-x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

A b' és a' választása és (1) következtében a két háromszög kerülete és területe egyenlő, de akkor a beírt körök sugara is megegyezik, és a háromszögek nem egybevágók. Így a feladat kérdésére „igen"-nel válaszolhatunk.

Pintér Dömötör (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o.t.)

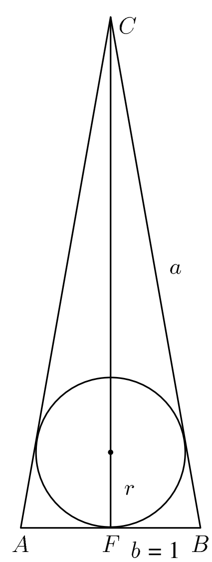
II. megoldás. Legyen az adott kör sugara 1. A *2. ábrán* látható egyenlő szárú háromszöget egyértelműen meghatározza a φ szög. A háromszög területét a három derékszögű deltoid területének összegeként kiszámítva: $t(\varphi)=\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}+2\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{4}$, ahol $0^\circ<\varphi<180^\circ$. Ismeretes, hogy adott kör köré írt háromszögek közül a legkisebb kerületű a szabályos, ezért a $t(\varphi)$ függvénynek a $\varphi=120^\circ$ helyen minimuma van. A minimum értéke $3\sqrt{3}$. A függvény a $(0^\circ;180^\circ)$ nyílt intervallumban folytonos, a $\varphi=0^\circ$ helyen vett jobb oldali, illetve a $\varphi=180^\circ$ helyen vett bal oldali határértéke egyaránt $+\infty$, ezért a függvény a $(0^\circ;120^\circ)$ és $(120^\circ;180^\circ)$ intervallumokban minden $3\sqrt{3}$-nál nagyobb értéket felvesz. Lesz tehát a két intervallum egyikében olyan φ_1, a másikban olyan φ_2, amelyekre $t(\varphi_1)=t(\varphi_2)$, és a két szöghoz tartozó két háromszög nem egybevágó. Sőt, végtelen sok ilyen háromszögpár van.

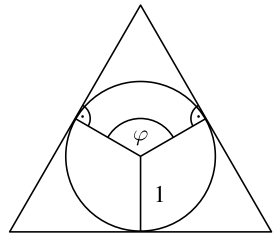
Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzések. 1. *Szita István* (Körmend, Kölcsey F. Gimn., IV. o.t.) a $t(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ függvényt vizsgálta, ahol x a kör köré írt egyenlő szárú háromszög alapjának a fele, $t(x)$ pedig a területe. Egyik megoldásában megmutatta, hogy $t(x)$ értékkészletének minden $3\sqrt{3}$-nál nagyobb elemét pontosan kétszer veszi fel, *ezért* létezik két különböző, egyenlő területű háromszög. Egy másik megoldásában konstruált két egyenlő területű háromszöget.

A feladat megoldásai összességükben is úgy oszlottak meg, hogy voltak konstruktív megoldások, mint az 1. megoldás, és voltak egzisztenciát igazolók, mint a második.

2. A 2. megoldásban felhasználtuk azt a tényt, hogy a vizsgált függvény minden $3\sqrt{3}$-nál nagyobb értéket felvesz (két intervallumban is). Pontosan megfogalmazva a következő tétel alkalmazásáról van szó: Ha az $f(x)$ függvény az $[a;b]$-ben folytonos, akkor az $[a;b]$ intervallumon fölvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.





φ
1