

A feladat megoldásához szükségünk lesz a következő segédtételekre: Legyen a k és k' körök metszéspontja E és F . Az E ponton átmenő tetszőleges e egyenes messe a k kört P -ben, k' -t pedig Q -ban. Bizonyítsuk be, hogy a PQ szakasz O felezőpontja bármely e esetén illeszkedik egy az E és F pontokon átmenő fix K körre.

Az FPQ háromszögben $OPF \sphericalangle = \alpha$ állandó (kerületi szög), hasonlóképpen $PQF \sphericalangle = \beta$ is állandó, vagyis független a P és Q pontok helyzetétől.

Ebből következik, hogy a $\angle QOF = \varepsilon$ is állandó. Az O felezőpont tehát rajta van az EF szakasz fölé írt ε szögű látóöríven. Mégpedig, ha O a k körbe esik és k elválasztja P -t és Q -t, O a látóörívnek a k körbe eső EF ívén van (1. ábra). Ha viszont a PQ szakasz felezőpontja a k' körbe esik és k elválasztja P -t és Q -t, akkor O az előbb mondott látóörív kiegészítő ívén lesz rajta (2. ábra). Ennek igazolását könnyen leolvashatjuk a 2. ábráról, hiszen most az EF szakasz O -ból $180^\circ - \varepsilon$ szög alatt látszik.

Meg kell vizsgálnunk még azokat az eseteket, amikor k nem választja el a P és Q pontokat. Essen most P és Q a k körbe. A PFQ háromszög két szöge most is α és β (állandó), ezért az EF szakasz ε szögű látóköre átmegy az O ponton. Ha P és Q a k' körbe esik, teljesen hasonló a bizonyítás az előzőhöz, O mértani helye most is a kiegészítő körív. A keresett fix kör tehát valóban létezik.

Ezután térjünk rá a feladat állításának bizonyítására. A Feuerbach-kör egy háromszögnek az a köre, amely átmegy a háromszög oldalainak felezőpontján, a magasságok talppontjain és a magasságvonalaknak a csúcs és magasságpont közé eső szakaszainak felezőpontján. (Ez összesen 9 pont, ezért is szokták a Feuerbach-kört 9 pontos körnek is nevezni.)

E 9 pont közül bármely 3 már meghatározza a kört.

Az ABC háromszög magasságai BE és CF (4. ábra), metszéspontjuk M . Az $AEMF$ húrnégyszög körülírt köre k' , az ABC háromszög BC oldala, mint átmérő fölé írt kör k . Az E és F pontok és a BM szakasz O felezőpontja meghatározza az ABC háromszög Feuerbach-körét. A BM egyenes is és a PQ egyenes is megfelel a segédtételben használt e egyenesek egyikének, így a segédtétel szerint PQ felezőpontja, R ugyanazt a kört határozza meg az E és F pontokkal, mint O , s ez a kör az ABC háromszög Feuerbach-köre. Ha a háromszög tompaszögű, akkor A és M

szerepet cserél, s a bizonyítás ugyanígy elvégezhető. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.