

I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőséget négyzetre emelve (a bal oldalon mindegyik tényező pozitív) és 2^{2m-1} -nel beszorozva a következő alakba írhatjuk:

$$2^{2m-1} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2m} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m} = 2m.$$

Ez a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt a $\sin^2 \frac{k\pi}{2m} = \sin \frac{k\pi}{2m} \cdot \sin \frac{(2m-k)\pi}{2m}$
 ($k = 1, \dots, m-1$) és a $\sin \frac{m\pi}{2m} = 1$ azonosságot felhasználva az alábbi alakba írható:

$$2 \sin \frac{\pi}{2m} \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{2m} \cdot 2 \sin \frac{3\pi}{2m} \cdots 2 \sin \frac{(2m-1)\pi}{2m} = 2m.$$

A bal oldalon álló tényezőőknek fontos geometriai jelentése van: az egyégsugarú körbe írt szabályos $2m$ -szög egy csúcsból induló átlóinak hosszai. Megmutatjuk, hogy ez a szorzat $2m$.

Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}$ a $2m$ -edik komplex egységgyökök, azaz $\varepsilon_k = \cos \frac{k\pi}{m} + i \sin \frac{k\pi}{m}$. A feladat $|1 - \varepsilon_1| \cdot |1 - \varepsilon_2| \cdots |1 - \varepsilon_{2m-1}|$ meghatározása.

Tekintsük az $f(z) = \frac{z^{2m-1}}{z-1} = z^{2m-1} + z^{2m-2} + \dots + z + 1$ polinomot; ennek gyökei éppen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}$, gyöktényezős alakja $f(z) = (z - \varepsilon_1) \dots (z - \varepsilon_{m-1})$, és ezért

$$|1 - \varepsilon_1| \cdot |1 - \varepsilon_2| \cdots |1 - \varepsilon_{2m-1}| = |f(1)| = 2m$$

II. megoldás. Konstruálunk egy alkalmas polinomot, amelynek gyökei az (1) bal oldalán álló tényezők, illetve azok ellentettjei, majd a gyökök szorzatát leolvassuk a polinom együtthatóiból.

Legyen R_n az az n -edfokú polinom, amelyre $R_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$. Ezeket a polinomokat másodfajú Csebisev-polinomoknak nevezik, és a $\sin(u+v) + \sin(u-v) = 2 \sin u \cos v$ azonosság alapján az

$$(1) \quad R_0(x) = 1; \quad R_1(x) = 2x; \quad R_{n+1}(x) = 2xR_n(x) - R_{n-1}(x)$$

rekurzióval állíthatók elő.

Az (1) rekurzióból leolvasható, hogy R_n főegyütthatója 2^n , továbbá a definíció alapján a gyökei:

$$\cos \frac{\pi}{n+1}, \quad \cos \frac{2\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad \cos \frac{n\pi}{n+1}.$$

Tekintsük most az $f(x) = \frac{R_{2m-1}(x)}{x}$ polinomot. (Ez valóban polinom, mert R_{2m-1} -nek $0 = \cos \frac{\pi}{2}$ gyöke, és ezért kiemelhető belőle x .) Az f polinom foka $2m-2$, gyökei a $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$ azonosság alapján éppen

$$\pm \sin \frac{\pi}{2m}, \quad \pm \sin \frac{2\pi}{2m}, \quad \dots, \quad \pm \sin \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

főgyűjtője 2^{2m-1} , konstans tagja

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_{2m-1}(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2mt}{\sin t \cos t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 2m(\frac{\pi}{2} + u)}{\sin(\frac{\pi}{2} + u) \cos(\frac{\pi}{2} + u)} = (-1)^{m-1} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 2mu}{\sin u} = (-1)^{m-1} 2m \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2mu}{2mu}}{\frac{\sin u}{u}} = (-1)^{m-1} 2m$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján a gyökök szorzata:

$$(-1)^{m-1} \sin^2 \frac{\pi}{2m} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \cdots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m} = (-1)^{2m-2} \frac{f(0)}{2^{2m-1}} = \frac{(-1)^{m-1} m}{2^{2(m-1)}}.$$

Ebből az állítás azonnal következik.