I. megoldás. Legyen az érintő kör sugara x. Használjuk az *1. ábra* további jelöléseit. Az O_2O_1O és O_1O_3O háromszögekre a koszinusztételt fölírva:

$$(R+x)^2=(R+r-x)^2+r^2+2(R+r-x)\cdot r\cdot\cos\gamma,\quad (r+x)^2=(R+r-x)^2+R^2-2(R+r-x)\cdot R\cdot\cos\gamma.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet R-rel, a másodikat r-rel, majd adjuk össze őket:

$$(R+x)^2R+(r+x)^2r=(R+r-x)^2(R+r)+r^2R+rR^2, \tag{1}$$

amiből némi számolással:

$$x=\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}.$$

Lobozár Ferenc (Szeged, Csonka J. Műsz. Szki., III. o.t.)

II. megoldás. R. Descartes-tól származik a következő tétel: ha négy kör bármelyike érinti a másik hármat, akkor görbületeik négyzetösszegének kétszerese egyenlő a görbületeinek összegének négyzetével.

Az r sugarú kör *görbülete* $\frac{1}{r}$, az egyenes görbülete zérus. A tétel akkor is érvényes, ha valamelyik kör helyett egyenes szerepel. Alkalmazása szempontjából az egymást kívülről érintő körök görbülete azonos előjelű, a belülről érintőké egymással ellentétes. Bizonyítása megtalálható *H. S. M. Coxeter:* A geometriák alapjai c. könyv 31–32. oldalán. A tétel alapján:

$$2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(r+R)^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}-\frac{1}{r+R}+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Ezt az $\frac{1}{x}$-re másodfokú egyenletet megoldva x meghatározható:

$$x=\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}.$$

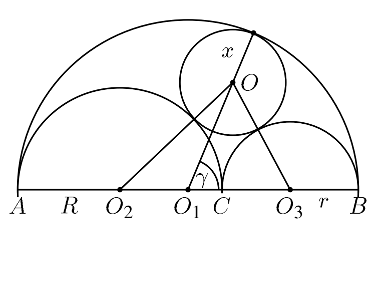
Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

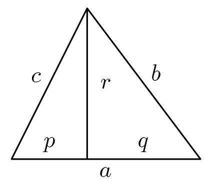
Megjegyzések. 1. Descartes idézett tétele az idők során feledésbe merült, majd többen is újra felfedezték, pl. 1936-ban *Sir Frederick Soddy* – Nobel-díjas fizikus –, aki azt is megmutatta, hogy analóg tétel érvényes a térben 5 gömbre. A tételekről Precíz csók címmel verset írt, amelynek egyik versszaka így fogalmazza meg a 2. megoldásban felhasznált tételt:

Egymásnak négy kör csókot ad,
a kisebbik hajlik jobban;
a görbület a központból
mért táv, de reciprokban.
Nem bírt vele Euklid' esze,
az ujjszabály sem szól bele;
mert nem görbül az egyenes
s a konkáv hajlás mínusz lesz,
a négy görbület négyzetösszege épp
a görbületösszeg négyzetének a fele.

2. *Zsombori Gabriella* (Csíkszereda, Márton Á. Gimn., IV. o.t.) megoldása a *Stewart-tételen* alapul. A tétel a *2. ábra* jelöléseivel így fogalmazható meg: $b^2p+c^2q-ar^2=apq$. Bizonyítása megtalálható *H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer:* Az újrafelfedezett geometria c. könyv 21–22. oldalán. A tételt az *1. ábra* OO_2O_3 háromszögére alkalmazva az (1) egyenletet kapjuk, amiből x meghatározható.

3. *Lobozár Ferenc* második megoldásában az *1. ábra* B pontját választotta egy inverzió pólusául. Az inverzió alapkörének sugarát $d^2=BC\cdot BA=2r(2r+2R)=4r(r+R)$ összefüggéssel definiálta. Így a B ponton átmenő két kör képe egy-egy egyenes lett, és a lényegesen egyszerűbb ábra alapján számolta ki a keresett sugarat.




c
r
b
p
q
a