

A feladat állítását n -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk.

$n = 2$ esetben $p = a_1$, és $q = a_2$ relatív prímek. Ekkor q többszöröse teljes maradékrendszert alkotnak p szerint, vagyis tetszőleges $0 \leq k < p$ számhoz létezik olyan $0 \leq j < p$, amelyre:

$$j \cdot q \equiv k \pmod{p}.$$

Így minden pq -nál nagyobb z számot elő lehet állítani a kívánt alakban: legyen k a z maradéka p -vel osztva. A k -hoz találunk p -nél kisebb j -t úgy, hogy

$$j \cdot q \equiv k \pmod{p}.$$

Ekkor $z - jq$ osztható p -vel, legyen a hányados l , így $z = jq + lp$, ahol $j \geq 0$ és $l \geq 0$. Ezzel $n = 2$ -re igazoltuk az állítást.

Tegyük fel, hogy valamilyen m -re, $n \leq m$ esetén az állítás igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor $n = m + 1$ esetén is igaz.

Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_m$ számok legnagyobb közös osztója d . Az indukciós feltétel szerint az $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_m}{d}$ számokkal véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható a kérdéses alakban. Így létezik olyan u , hogy: $(u, a_{m+1}) = 1$ és $\frac{a_1}{d}v_1 + \frac{a_2}{d}v_2 + \dots + \frac{a_m}{d}v_m = u$, ahol $v_1, v_2, \dots, v_m$ nemnegatív egész.

Mivel d és a_{m+1} relatív prímek (különben az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m+1}$ számoknak lenne közös osztója), ud és a_{m+1} is relatív prímek. Az előbb beláttuk, hogy a feladat állítása $n = 2$ esetén igaz, azaz véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható

$$x_1 du + x_2 a_{m+1}$$

alakban, azaz $x_1 v_1 a_1 + x_1 v_2 a_2 + x_1 v_3 a_3 + \dots + x_1 v_m a_m + x_2 a_{m+1}$ alakban, ahol $x_1 v_1, x_1 v_2, x_1 v_3, \dots, x_1 v_m, x_2$ nemnegatív egészek.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)