Legyen a nagyobb négyzet oldala egységnyi, a kisebbiké x, a körök sugara pedig r. Az *ábra* alapján nyilvánvaló, hogy $\sqrt{2} = 2\left(r\sqrt{2}+r\right) + x\sqrt{2}$, amiből

(1)
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)(1-x)\,.$$

A sötét részek területének összege:

$$T(x) = x^2 + 4 \cdot r^2 \cdot \pi = x^2 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cdot (1-x)^2,$$

és így

(2)
$$T(x) = \left(6 \cdot \pi - 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} + 1\right) \cdot x^2 + \left(8 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} - 12 \cdot \pi\right) \cdot x + \left(6 \cdot \pi - 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}\right).$$

A feladat feltételei szerint:

(3)
$$0 < x < 1 \qquad \text{és}$$

(4)
$$4r \le 1.$$

Könnyen látható, hogy (2)-ben x^2 együtthatója pozitív, ezért a (3) szerinti intervallumban lokális minimum lehetséges. Az

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

azonosság alapján $T(x)$ minimuma az

$$x_0 = -\frac{8\pi \cdot \sqrt{2} - 12\pi}{2 \cdot (6\pi - 4\pi \cdot \sqrt{2} + 1)} \approx 0,5187$$

helyen lehetséges. Tekintve, hogy ezzel az értékkel – (1)-ből r-et kiszámítva – (3) és (4) teljesül, x_0-ban valóban minimum van.

Mivel a (3)-ban szereplő intervallum nyitott, maximum nem lesz.

Varga Áron (Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Műsz. Szki. és Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján