

I. megoldás. A diszkusszió egyszerűsítése érdekében először nem-negatív egészekre oldjuk meg a feladatot (tehát megengedjük a 0-t is).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n pozitív egészre pontosan négy olyan nemnegatív egész létezik, amelynek négyzete ugyanarra az n darab számjegyre végződik, továbbá a négy szám közül kettő 0 és az 1, a másik két szám utolsó jegye 5, illetve 6.

Az $n = 1$ esetben a kilenc egyjegyű számot végigvizsgálva láthatjuk, hogy közülük valóban az 1, 5 és 6 számok megfelelők.

Tegyük fel, hogy állításunk igaz $n = k$ -ra; ebből belátjuk $n = k + 1$ esetére is.

Keressük a számokat $x = 10^k \cdot a + b$ alakban, ahol $0 \leq a \leq 9$ az első számjegy, $0 \leq b < 10^k$ pedig az utolsó k számjegyből alkotott szám. Annak kell teljesülnie, hogy x és x^2 utolsó $k + 1$ jegye megegyezék, vagyis

$$10^{k+1} \mid x^2 - x = 10^{k+1}10^{k-1}a^2 + 10^k \cdot (2b - 1)a + (b^2 - b).$$

A jobb oldalon álló három tag közül az első biztosan osztható 10^{k+1} -nel, a második pedig 10^k -nal. Ezért az utolsó tagnak, $(b^2 - b)$ -nek oszthatónak kell lennie 10^k -nal. Az indukciós feltevés szerint négy ilyen lehetséges b létezik.

Ahhoz, hogy a jobb oldal ne csak 10^k -nal, hanem 10^{k+1} -nel is osztható legyen, szükséges és elégséges, ha $(2b - 1)a + \frac{b^2 - b}{10^k}$ osztható 10-zel. Mivel $2b - 1$ mind a négy esetben relatív prím a 10-hez, pontosan egy-egy megfelelő a található hozzájuk. Tehát mind a négy lehetséges b érték egyértelműen egészíthető ki egy-egy megfelelő, legfeljebb $(k + 1)$ -jegyű számmá. Az is látható, hogy $b = 0$ és $b = 1$ esetén $a = 0$ az új jegy, de a többi esetben is az utolsó számjegy megegyezik b utolsó jegyével.

Tehát tetszőleges n -re három megfelelő pozitív egész van.

II. megoldás. Legyen x egy olyan legfeljebb n -jegyű pozitív egész szám (azaz $0 \leq x < 10^n$), amelyre x és x^2 utolsó n jegye megegyezik, vagyis $10^n = 2^n \cdot 5^n \mid x^2 - x = x(x - 1)$. Mivel x és $x - 1$ relatív prímek, ez pontosan akkor teljesül, ha x és $x - 1$ közül valamelyik osztható 2^n -nel, és valamelyik (esetleg ugyanaz) osztható 5^n -nel. Ez összesen 4 esetet jelent.

1. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x$. Ekkor $10^n \mid x$, ami ellentmond az x -re vonatkozó feltételnek. Ilyen x tehát nincs.

2. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x - 1$. Ekkor $10^n \mid x - 1$, ami $x = 1$ esetén teljesül. Ez az eset tehát egy megoldást ad, az 1-et.

3. eset: $2^n \mid x - 1$ és $5^n \mid x$. Ekkor $x = k \cdot 5^n$ valamilyen $0 < k < 2^n$ egész számmal. Mivel 2^n és 5^n relatív prímek, a $0 \cdot 5^n, 1 \cdot 5^n, 2 \cdot 5^n, \dots, (2^n - 1) \cdot 5^n$ számok teljes maradérendszer alkotnak modulo 2^n , következésképpen pontosan egy olyan van közöttük, amely 2^n -nel osztva 1 maradékot ad. Ez nem lehet a 0. Ez az eset is egyetlen x -re lehetséges.

4. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x - 1$. Ennek a vizsgálata a 3. esettel megegyezik, csak a 2^n és 5^n számokat kell felcserélnünk.

A 2., 3., 4. esetekben találtunk egy-egy megoldást; összesen tehát három olyan legfeljebb n -jegyű pozitív egész van, amelynek négyzete ugyanarra az n jegyre végződik.

Megjegyzések. 1. A két nem triviális megoldásra *Terpai Tamás* explicit képletet is adott: az egyik szám 5^{2^n} -nek a 10^n -nel való osztási maradéka, a másik szám pedig $10^n - 5^{2^n} + 1$ -nek a 10^n -nel való osztási maradéka. Ennek oka az, hogy

$$\left(5^{2^n}\right)^2 - 5^{2^n} = 5^{2^n} \left(5^{2^{n-1}} + 1\right) \left(5^{2^{n-2}} + 1\right) \dots \left(5^{2^0} + 1\right) \left(5^{2^0} - 1\right).$$

A bal oldalon szereplő 5^{2^n} és az $n + 1$ darab tényező miatt ez a szám osztható 10^n -nel. (A másik számra a bizonyítás hasonló.)

2. Több versenyző nem foglalkozott a 0 esettel. Ők 4 pontot kaptak.