I. megoldás. A diszkusszió egyszerűsítése érdekében először nem-negatív egészekre oldjuk meg a feladatot (tehát megengedjük a 0-t is).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n pozitív egészre pontosan négy olyan nemnegatív egész létezik, amelynek négyzete ugyanarra az n darab számjegyre végződik, továbbá a négy szám közül kettő 0 és az 1, a másik két szám utolsó jegye 5, illetve 6.

Az $n=1$ esetben a kilenc egyjegyű számot végigvizsgálva láthatjuk, hogy közülük valóban az 1, 5 és 6 számok megfelelők.

Tegyük fel, hogy állításunk igaz $n=k$-ra; ebből belátjuk $n=k+1$ esetére is.

Keressük a számokat $x=10^k \cdot a+b$ alakban, ahol $0 \le a \le 9$ az első számjegy, $0 \le b < 10^k$ pedig az utolsó k számjegyből alkotott szám. Annak kell teljesülnie, hogy x és x^2 utolsó $k+1$ jegye megegyezzék, vagyis

$$10^{k+1} \,\Big|\, x^2-x=10^{k+1}10^{k-1}a^2+10^k\cdot(2b-1)a+(b^2-b).$$

A jobb oldalon álló három tag közül az első biztosan osztható 10^{k+1}-nel, a második pedig 10^k-nal. Ezért az utolsó tagnak, (b^2-b)-nek oszthatónak kell lennie 10^k-nal. Az indukciós feltevés szerint négy ilyen lehetséges b létezik.

Ahhoz, hogy a jobb oldal ne csak 10^k-nal, hanem 10^{k+1}-nel is osztható legyen, szükséges és elégséges, ha $(2b-1)a+\dfrac{b^2-b}{10^k}$ osztható 10-zel. Mivel $2b-1$ mind a négy esetben relatív prím a 10-hez, pontosan egy-egy megfelelő a található hozzájuk. Tehát mind a négy lehetséges b érték egyértelműen egészíthető ki egy-egy megfelelő, legfeljebb $(k+1)$-jegyű számmá. Az is látható, hogy $b=0$ és $b=1$ esetén $a=0$ az új jegy, de a többi esetben is az utolsó számjegy megegyezik b utolsó jegyével.

Tehát tetszőleges n-re három megfelelő pozitív egész van.

II. megoldás. Legyen x egy olyan legfeljebb n-jegyű pozitív egész szám (azaz $0 \le x < 10^n$), amelyre x és x^2 utolsó n jegye megegyezik, vagyis $10^n=2^n\cdot 5^n \mid x^2-x=x(x-1)$. Mivel x és $x-1$ relatív prímek, ez pontosan akkor teljesül, ha x és $x-1$ közül valamelyik osztható 2^n-nel, és valamelyik (esetleg ugyanaz) osztható 5^n-nel. Ez összesen 4 esetet jelent.

1. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x$. Ekkor $10^n \mid x$, ami ellentmond az x-re vonatkozó feltételnek. Ilyen x tehát nincs.

2. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x-1$. Ekkor $10^n \mid x-1$, ami $x=1$ esetén teljesül. Ez az eset tehát egy megoldást ad, az 1-et.

3. eset: $2^n \mid x-1$ és $5^n \mid x$. Ekkor $x=k\cdot 5^n$ valamilyen $0<k<2^n$ egész számmal. Mivel 2^n és 5^n relatív prímek, a $0\cdot 5^n$, $1\cdot 5^n$, $2\cdot 5^n$, …, $(2^n-1)\cdot 5^n$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo 2^n, következésképpen pontosan egy olyan van közöttük, amely 2^n-nel osztva 1 maradékot ad. Ez nem lehet a 0. Ez az eset is egyetlen x-re lehetséges.

4. eset: $2^n \mid x$ és $5^n \mid x-1$. Ennek a vizsgálata a 3. esettel megegyezik, csak a 2^n és 5^n számokat kell felcserélnünk.

A 2., 3., 4. esetekben találtunk egy-egy megoldást; összesen tehát három olyan legfeljebb n-jegyű pozitív egész van, amelynek négyzete ugyanarra az n jegyre végződik.

Megjegyzések. 1. A két nem triviális megoldásra *Terpai Tamás* explicit képletet is adott: az egyik szám 5^{2^n}-nek a 10^n-nel való osztási maradéka, a másik szám pedig $10^n-5^{2^n}+1$-nek a 10^n-nel való osztási maradéka. Ennek oka az, hogy

$$\left(5^{2^n}\right)^2-5^{2^n}=5^{2^n}\left(5^{2^{n-1}}+1\right)\left(5^{2^{n-2}}+1\right)\ldots\left(5^{2^0}+1\right)\left(5^{2^0}-1\right).$$

A bal oldalon szereplő 5^{2^n} és az $n+1$ darab tényező miatt ez a szám osztható 10^n-nel. (A másik számra a bizonyítás hasonló.)

2. Több versenyző nem foglalkozott a 0 esettel. Ők 4 pontot kaptak.