

A megoldáshoz felhasználjuk *Desargues „két háromszög” tételét*. A tétel megfogalmazásához szükségünk lesz a következő meghatározásokra:

1. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek a D pontra nézve perspektívek, ha az AA' , BB' , CC' egyenesek a D ponton mennek át.

2. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek a d egyenesre nézve perspektívek, ha az AB , $A'B'$; BC , $B'C'$; CA , $C'A'$ egyenespárok metszéspontja a d egyenesre illeszkedik. (Itt megengedjük, hogy valamelyik egyenespár a d egyenessel párhuzamos legyen.) Ezek után *Desargues tétele*: Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy pontra nézve perspektívek, akkor egy egyenesre nézve is perspektívek, és megfordítva: ha tengelyesen perspektívek, akkor pontra nézve is azok. A tétel bizonyítása megtalálható a következő könyvekben: *H. S. M. Coxeter–S. L. Greitzer: Az újrafelfedezett geometria; Reiman István: A geometriai és határterületei (Gondolat Kiadó, 1986)*.

Tekintsük a feladatot megoldottnak. Feltesszük, hogy e , f , g a szerkesztendő háromszög síkjában van. (Egy – nemcsak vonalzót használó – szerkesztés található a **Gy. 3068**. példa megoldásában arra az itt meg nem engedett esetre is, amikor e , f és g nincs egy síkban.) Jelöljük az e , f , g félegyenesekre illeszkedő háromszögcsúcsokat rendre A , B , C -vel, a félegyenesek kezdőpontját D -vel, az AB , BC , CA oldalakra illeszkedő adott pontokat rendre P , Q , R -rel. Előfordulhat, hogy P , Q , R valamelyike illeszkedik e , f , g valamelyikére, vagy e , f , g közül kettő egy egyenesbe esik. Ezeket a triviális eseteket egyelőre figyelmen kívül hagyjuk. Húzzunk párhuzamost P -n át e -vel, Q -n át pedig g -vel. Az így kapott egyenesek az f félegyenesen S_1 és S_2 pontokban metszik (1. ábra). Az S_1 kezdőpontú, f -re illeszkedő félegyenes S_1 -től különböző pontja legyen B' . B' választása folytán $B'P$ metszi e -t egy A' , és $B'Q$ metszi g -t egy C' pontban. A keletkezett $A'B'C'$ háromszög a D pontra nézve perspektív ABC -vel, ezért Desargues tétele szerint tengelyesen is perspektív, a tengelye nyilván PQ . A tétel szerint a CA és $C'A'$ egyenesek a PQ tengelyen metszik egymást, vagy párhuzamosak PQ -val. Ezért két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $C'A'$ metszi PQ -t, a szerkesztést úgy végezzük el, hogy a fent leírt módon szerkesztünk egy $A'B'C'$ háromszöget, megkeressük $C'A'$ és PQ X metszéspontját, és ezt összekötjük R -rel. Az XR egyenes kimetszi e -ből és g -ből az A , illetve C pontokat. Minden lépés egyélű vonalzóval végrehajtható, és a B csúcs is rögtön adódik. A szerkesztést a 2. ábrán mutatjuk be. A feladatnak akkor lesz pontosan egy megoldása, ha XR e -t is, g -t is metszi. Az egyértelműség abból következik, hogy egy másik $A''B''C''$ háromszöggel próbálkozva, az perspektív lesz D -re nézve $A'B'C'$ -vel, ezért tengelyesen is perspektívek lesznek PQ tengellyel, így az X pont egyértelmű, és vele együtt A és C is. A és B megszerkesztése után az ABC és $A'B'C'$ perspektivitása alapján B is egyértelmű.

Hátravan még az az eset, amikor $C'A'$ párhuzamos PQ -val. Ekkor a megoldást úgy kell befejeznünk, hogy R -en át párhuzamost szerkesztünk PQ -val, csak vonalzóval. A 3. ábrán láthatjuk, hogy a $PQYZ$ trapéz PQ oldalának F felezőpontját hogyan szerkeszthetjük meg csak vonalzóval. Ugyanez az ábra azt is megmutatja, hogyan lehet a megfeleltetett PQ szakasszal pl. Y -on keresztül párhuzamost szerkeszteni vonalzóval. A megoldást úgy fejezhetjük be, hogy a PQ szakaszt a vele párhuzamos $C'A'$ segítségével megfelezzük, majd az R ponton át – R -nek pl. az Y szerepét adva – PQ -val párhuzamost szerkesztünk. (Ha $PQ = C'A'$ lenne, akkor pl. C' helyett a $C'A'$ egyenes egy másik C'' pontjával szerkeszthetjük meg F -et.) A feladatnak most is pontosan egy megoldása lesz, ha az R -en át PQ -val húzott párhuzamos metszi az e és g félegyeneseket.

A megoldás elején említett speciális esetek a következőképpen alakulnak. Ha e , f , g közül semelyik kettő nem esik egy egyenesbe, és a különböző P , Q , R pontok valamelyike (esetleg több is) illeszkedik valamelyik egyenesre, akkor a megoldás – ha létezik – egyértelmű. Ha viszont P , Q , R közül kettő egybeesik, akkor a feladatnak végtelen sok megoldása van.

Hasonlóan vizsgálhatók azok az esetek, amikor e , f , g közül kettő egy egyenesbe esik (ez kétféleképpen lehetséges), és a P , Q , R pontok különbözőek vagy nem, illetve illeszkedik-e valamelyik pont valamelyik félegyenesre, vagy nem.



